Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

SS 2003

Diskrete Optimierung
Übung 9 vom 17.06.03

Abgabe der Aufgaben bis 15:00 Uhr am **Dienstag, 24.06.03** vor der großen Übung.

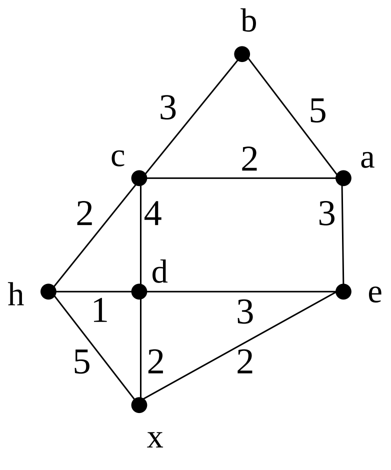
Aufgabe 1 (Der Satz von Menger):
Zwei Pfade in einem gerichteten Graphen sind *innen knotendisjunkt*, wenn sie außer den Anfangs- und Endknoten keine gemeinsamen Knoten haben. Für Knoten r und s in einem gerichteten Graphen G *trennt* eine Knotenmenge $S \subseteq V \setminus \{r, s\}$ r von s, wenn es in $G \setminus S$ keinen gerichteten Weg von r nach s gibt.

Beweise den Satz von Menger: Die maximale Zahl von paarweise innen knotendisjunkten gerichteten Wegen von r nach s ist gleich der minimalen Größe einer Knotenmenge, die r und s trennt.

(Tipp: Wende Max-Flow=Min-Cut auf einen geeignet modifizierten Graphen an. Da hier Knoten gefragt sind, ein Cut aber aus Kanten besteht, müssen die Knoten also irgendwie in Kanten überführt werden!) (20 Punkte)

Aufgabe 2 (Gomory-Hu-Bäume):

a) Finde einen Gomory-Hu-Baum für den folgenden Graphen.

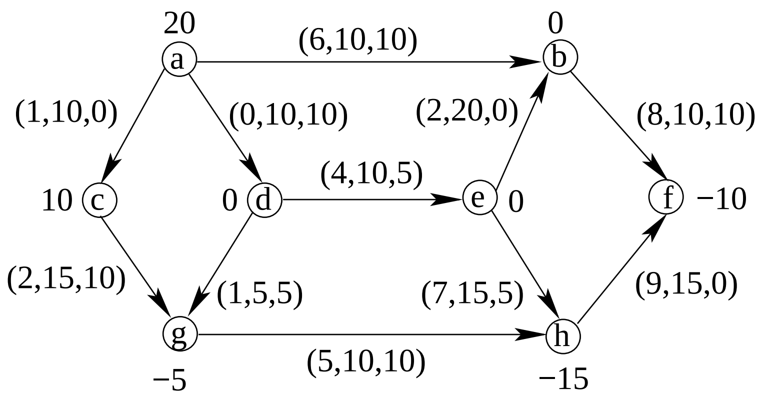


b) Ein gewichteter Baum T für einen ungerichteten Graphen G mit Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$ heisst *flussäquivalent* zu G, falls $V(T) = V(G)$ und für alle $s, t \in V(G)$ die Kapazität eines minimalen $s-t$-Schnittes gleich dem minimalen Gewicht f_e über alle Kanten e auf einen Pfad $s-t$-Pfad in T ist.

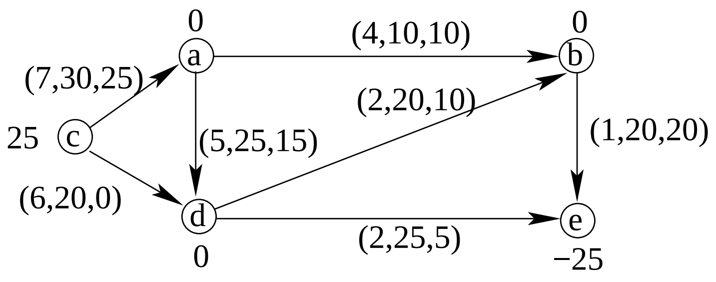
Gib einen Graphen G und einen zu G flussäquivalenten Baum T an, so dass T kein Gomory-Hu-Baum ist.

(10+10 Punkte)

Aufgabe 3 (Min-Cost-Flow Probleme):
Betrachte die in Abbildung 1 gezeigten Min-Cost-Flow-Probleme (a) und (b). Die Zahlen an den Kanten stehen für Kosten, Kapazität, Fluss und die Zahlen an den Knoten für die Nachfrage. Entscheide, ob die jeweiligen gezeigten Flussvektoren optimal sind. Falls ein Fluss nicht optimal ist, gib einen negativen Kreis an. Falls ein Fluss optimal ist, gib Knotenpotentiale π an, welche die Komplementaritätsbedingungen erfüllen.



(a)



(b)

Abbildung 1: Min-Cost-Flow Probleme mit jeweiligen Flüssen

(20 Punkte)