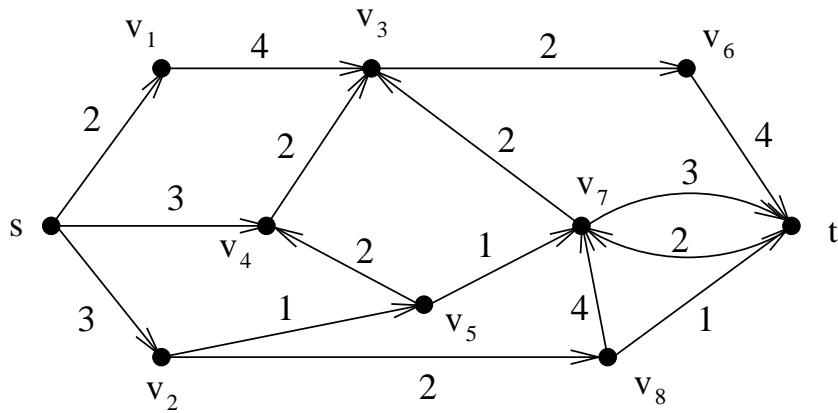


Diskrete Optimierung Übung 8 vom 03.06.03

Abgabe der Aufgaben bis 15:00 Uhr am **Dienstag, 17.06.03** vor der großen Übung.

Aufgabe 1 (Der Preflow-Push Algorithmus):

Betrachte folgendes Netzwerk. Löse das zugehörige Maximaler-Fluss Problem unter der



Anwendung des Preflow-Push-Algorithmus in der Version von Goldberg und Tarjan.
 (15 Punkte)

Aufgabe 2 (Zirkulationstheorem von Hoffman (1960)):

Beweise das Zirkulationstheorem von Hoffman: gegeben sei ein Digraph mit unteren und oberen Kapazitäten $l, u : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ wobei $l(e) \leq u(e)$ für alle Kanten $e \in E(G)$. Zeige, dass eine Zirkulation f mit $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$ für alle Kanten $e \in E(G)$ genau dann existiert, wenn

$$\sum_{e \in \delta^-(X)} l(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \quad \text{für alle Teilmengen } X \subseteq V(G).$$

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Kantenzusammenhang von Graphen):

Der Kantenzusammenhang eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist die kleinste Zahl k der Kanten, die entfernt werden müssen, damit G nicht mehr zusammenhängend ist.

Zeige, wie der Kantenzusammenhang von G durch die Berechnung der maximalen Flüsse in höchstens $|V|$ Netzen mit jeweils $O(|V|)$ Ecken und $O(|E|)$ Kanten bestimmt werden kann.
 (15 Punkte)

Aufgabe 4 (Kampf um den Titel):

(a) Es würde knapp werden für Energie Braunschweig.

Fünf Spieltage vor Ende der Saison 2003/2004 sah die Tabellenspitze so aus:

Platz	Team	Siege	Niederlagen
1	ALBA Berlin	20	1
2	Telekom Baskets Bonn	19	2
3	RheinEnergie Cologne	17	4
4	TSK Universa Bamberg	17	4
5	Opel Skyliners Frankfurt	17	4
6	TXU Energie Braunschweig	16	5

Alle anderen Mannschaften hatten weniger alle 15 Siege; die letzten 5 Spiele würden die sechs Spitzenteams gegeneinander spielen.

Hatte Braunschweig noch eine Chance, die alleinige Tabellenführung zu übernehmen und damit das Heimrecht für die Entscheidungsspiele während der Playoffs?

(Bitte eine möglichst einfache Begründung für die Antwort!)

(b) Jetzt betrachten wir das Problem allgemeiner:

In einer Liga spielen N Mannschaften um den Titel. Jede Mannschaft spielt n -mal gegen jede andere Mannschaft, und es gibt keine Unentschieden. Wer am Ende am die meisten Siege hat, ist Meister. Nach einiger Zeit hat jede Mannschaft schon eine Reihe von Spielen gespielt und entsprechend Siege gesammelt. Ob eine Mannschaft am Ende noch Meister werden kann, hängt zu diesem Zeitpunkt aber nicht nur von ihren eigenen Spielergebnissen ab, sondern auch von den verbliebenen Spielen der Konkurrenten untereinander.

Es soll die Frage untersucht werden, ob eine gewisse Mannschaft, bei einem gegebenen Punktestand aller Mannschaften und bei einer gegebenen Menge von noch zu spielenden Spielen, *theoretisch* überhaupt noch die Möglichkeit hat, Meister zu werden. Das heisst: Gibt es eine Kombination von Spielergebnissen der verbliebenen Spiele, so dass die betreffende Mannschaft insgesamt mindestens so viele Siege erreicht wie jede andere Mannschaft?

Genauer gefragt: Wie kann man dieses Problem als eine Frage über die Existenz eines maximalen Flusses formulieren?

(Tipp: Betrachte einen gerichteten Graph, der außer einer Quelle s und einer Senke t noch zwei "Schichten" von Knoten enthält; eine Schicht repräsentiert alle anderen Mannschaften, die andere die verbliebenen Begegnungen dieser Mannschaften untereinander. Wähle dann die Kanten und die Kapazitäten geeignet. Inwiefern entspricht ein maximaler Fluss einer möglichen Kombination von Ergebnissen?)

(c) Lässt sich die Methode aus (b) so modifizieren, dass sie auch noch für die Fussball-Bundesliga funktioniert, in der es für einen Sieg 3 Punkte für ein Unentschieden 1 Punkt, für eine Niederlage 0 Punkte gibt? (15 Punkte)