Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

SS 2003

Diskrete Optimierung
Übung 7 vom 27.05.03

Abgabe der Aufgaben bis 15:00 Uhr am **Dienstag, 03.06.03** vor der großen Übung.

Aufgabe 1 (Ford-Fulkerson-Algorithmus und irrationale Kapazitäten): Zeige, dass der Ford-Fulkerson Algorithmus angewandt auf ein Netzwerk mit irrationalen Kapazitäten nicht terminieren muss.

Betrachte dafür das Netzwerk in Abbildung 1. Jedes Segment ab stellt die zwei gerichteten Kanten (a, b) und (b, a) dar. Die Kanten haben die Kapazität $\frac{1}{1-\sigma}$ mit einigen Ausnahmen:

$$u((x_1, y_1)) = 1, u((x_2, y_2)) = \sigma, u((x_3, y_3)) = u((x_4, y_4)) = \sigma^2,$$

wobei $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Beachte, dass $\sigma^n = \sigma^{n+1} + \sigma^{n+2}$. (Ford und Fulkerson 1962).

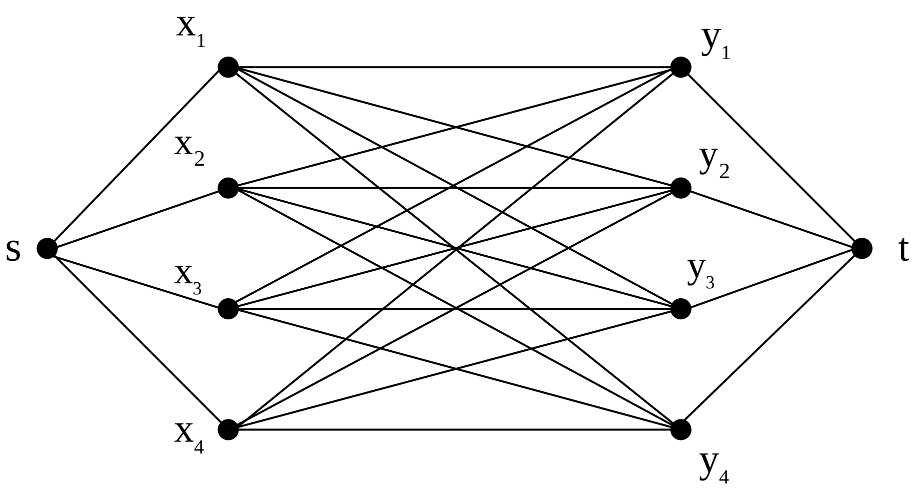

Abbildung 1: Ein Netzwerk mit irrationalen Kapazitäten.

(20 Punkte)

Aufgabe 2 (Kombinatorische Anwendungen von maximalen Flüssen):

a) **Bipartites Maximum-Matching:** Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (V, E)$, $V = V_1 + V_2$. Ein Matching $M \subseteq E$ ist eine Menge von paarweise nicht-inzidenten Kanten. Das BIPARTITE MAXIMUM-MATCHING Problem besteht darin, ein Matching maximaler Größe in einem bipartiten Graphen zu finden. Zeige, dass bipartites Maximum-Matching auf das Maximaler-Fluss Problem zurückgeführt werden kann.

   Tipp: Konstruiere ein Netzwerk $G' = (V', E')$ mit $V' = V \cup \{s, t\}$,

$$E' \;=\; \{(s,u)|u \in V_1\} \;\cup\; \{(v,t)|v \in V_2\} \;\cup\; \{(u,v)|u \in V_1, v \in V_2, \{u,v\} \in E\}$$

   und Einheitskapazitäten auf allen Kanten in E'.

b) **Scheduling auf parallelen Rechnern:** Betrachte folgendes Scheduling-Problem. Eine Menge J von Aufgaben soll auf M parallelen Maschinen ausgeführt werden. Aufgabe j benötigt p_j Tage für ihre Ausführung. Sie darf erst ab Tag r_j ("release date", d.h. Freigabedatum) ausgeführt werden und muß bis Tag d_j ("due date", d.h. Fälligkeitsdatum) mit $d_j \geq r_j + p_j$ beendet werden. Es wird angenommen, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt jede Maschine genau eine Aufgabe durchführen kann, und jede Aufgabe von genau einer Maschine durchgeführt wird. Allerdings darf eine Aufgabe unterbrochen werden und an verschiedenen Tagen auf verschiedenen Rechnern durchgeführt werden. Gesucht ist ein zulässiger Ablaufplan ("Schedule"), falls einer existiert.

   Formuliere dieses Scheduling-Problem als ein äquivalentes Maximaler-Fluss-Problem zurück.

   Tipp: Sortiere alle Tage r_j und p_j in aufsteigender Reihenfolge und bestimme die Menge T der $P \leq 2|J| - 1$ disjunkten Intervallen von aufeinander folgenden Tagen in dieser sortierten Reihenfolge. Sei $T_{k,l}$ das Zeitintervall, das am Tag k beginnt und am Beginn des Tages $l + 1$ endet. Beachte, dass im Intervall $T_{k,l}$ alle Jobs j mit $r_j \leq k$ und $d_j \geq l + 1$ durchgeführt werden können.
   Konstruiere ein Netzwerk $G' = (V', E')$ mit $V' = J \cup T \cup \{s, t\}$, Kanten (s, j) mit Kapazität p_j, Kanten $(T_{k,l}, t)$ mit Kapazität $(l - k + 1)M$ und Kanten $(j, T_{k,l})$ mit Kapazität $(l - k + 1)$, wobei $r_j \leq k$ und $d_j \geq l + 1$ gelten müssen.

(20 Punkte)

Aufgabe 3 (Der Fluss des Geldes):
Der ehrenwerte Dottore Gian-Pietro Circolo hatte ein Problem.

Gerade erst hatte er den Vorstand seines wohltätigen Zirkels übernommen. Das war an sich schon eine lästige Aufgabe, die ihn für zwei Jahre von seinem eigentlichen Aufgabengebiet abhalten würde – nämlich durch Ausnutzung des Zufalls Geld zu machen. Nicht genug damit, jetzt gab es auch in der Praxis knallharte Fluktuationen in den Finanzströmen: Cristiano Luppo, der neue Pate in der Landeshauptstadt, hatte unmissverständlich klargemacht, dass sämtliche erwirtschafteten Gelder kurzfristig an ihn abzuführen seien. Entsprechende Instruktionen waren schon an den Chef der örtlichen Loge, Gianni Littro (genannt "Il Presidente") ergangen. Aber Dottore Circolo (in Kollegenkreisen bekannt als "Don Denaro") hatte bereits eine ganze Reihe von ehrenwerten Verpflichtungen; zweifellos die wichtigste dabei war die Nachwuchspflege, eines der ureigensten Ziele der Loge. Die Einstellung spezieller Kräfte für diesen Zweck oblag traditionell Signore Bianco – genannt "Duro Coraggio" wegen seines nimmermüden Einsatzes für die Jugend. Wenn es Don Denaro gelänge, möglichst viele der vorhandenen Gelder an Don Duro zu transferieren und damit dem eisernen Zugriff des Paten zu entziehen, dann wäre es noch möglich, für die kommende Saison ausreichend viele Hilfkräfte zu rekrutieren.

Wie aber diesen Transfer möglichst intelligent vornehmen? Alle Konten der Loge unterlagen genauer Kontrolle, größere Beträge würden vom Paten unnachsichtig entdeckt, abgeschöpft und zweckentfremdet. Es bot sich an, die gnadenlosen Häscher des Paten durch ein raffiniertes System an kleineren Einzeltransfers in die Irre zu führen. Dafür würde Don Denaro seine verlässlichen und ehrenwerten Logenbrüder und -schwestern einschalten.

Im Einzelnen:

(1) Benedetta Quercia, genannt "Donna Gruppa"

(2) Cecilia Bottolegatore, genannt "Donna Numera"

(3) Sandro Nero, genannt "Don Algoritmo"

(4) Chiaro Empelo, genannt "Don Cristallo"

(5) Chiaro Leone, genannt "Don Topolino"

(6) Michele Huomo di Nuove, genannt "Don Casuale"

(7) Gianni Odanza, genannt "Don Algebraico"

(8) Ugo Italiano, genannt "Don Cappucino"

(9) Lupo Sabbia, genannt "Don Gioco"

(10) Tomaso Suono, genannt "Don Fluido"

(11) Gianni Padrone, genannt "Don Functione"

(12) Uberto Huomo di Camera, genannt "Don Ferrovia"

Aus Geheimhaltungsgründen trugen Don Denaro das Kürzel (s) und Don Duro das Kürzel (t).

Die folgenden Obergrenzen existierten für gefahrlose Transfers:

(s) Don Denaro an: (2) Donna Numera 8000 E; (6) Don Casuale 7000 E; (8) Don Cappucino 1000 E; (10) Don Fluido 9000 E; (12) Don Ferrovia 8000 E;

(1) Donna Gruppa an: (4) Don Cristallo 3000 E; (7) Don Algebraico 4000 E;

(2) Donna Numera an: (1) Donna Gruppa 4000 E; (t) Don Duro 5000 E;

(3) Don Algoritmo an: (1) Donna Gruppa 3000 E; (7) Don Algebraico 4000 E; (t) Don Duro 8000 E;

(4) Don Cristallo an: (5) Don Topolino 3000 E; (9) Don Gioco 2000 E;

(5) Don Topolino an: (9) Don Gioco 3000 E; (t) Don Duro 1000 E;

(6) Don Casuale an: (3) Don Algoritmo 2000 E; (11) Don Functione 4000 E; (12) Don Ferrovia 2000 E;

(7) Don Algebraico an: (5) Don Topolino 2000 E; (t) Don Duro 4000 E;

(8) Don Cappucino an: (1) Donna Gruppa 1000 E;

(9) Don Gioco an: (3) Don Algoritmo 3000 E; (t) Don Duro 9000 E;

(10) Don Fluido an: (4) Don Cristallo 5000 E; (5) Don Topolino 5000 E; (9) Don Gioco 1000 E; (11) Don Functione 1000 E;

(11) Don Functione an: (9) Don Gioco 3000 E; (t) Don Duro 5000 E;

(12) Don Ferrovia an: (2) Donna Numera 4000 E; (3) Don Algoritmo 4000 E; (7) Don Algebraico 2000 E;

Ein Minimum an 25000 E wurde von Don Duro benötigt, wenn möglich mehr. Keiner der Kollegen würde Gelder abzweigen und sicher auch nicht zuschießen.

Würde das Vorhaben gelingen? Welche Transfers waren dafür nötig? Wo würde es sich lohnen, die Obergrenzen zu erhöhen? Und was würde sich der Pate mit Don Denaro einfallen lassen, wenn er ihm auf die Schliche käme? ("Nichts persönliches, aber sicher eine geschäftliche Reaktion" notierte sich Don Denaro in Gedanken.)

Konkret:

(a) Stelle das zugehörige Netzwerk dar.

(b) Löse das zugehörige Netzwerkflussproblem unter Benutzung des Algorithmus von Edmonds und Karp.

(c) Gib einen minimialen Schnitt an, der die Lösung beschränkt.

(d) Zerlege den gefundenen optimalen Fluss in eine Reihe von konstanten Flüssen auf s-t-Pfaden.

(20 Punkte)