**Abteilung für Mathematische Optimierung**
**TU Braunschweig**

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

**SS 2003**

# Diskrete Optimierung
# Übung 6 vom 20.05.03

Abgabe der Aufgaben bis 15:00 Uhr am **Dienstag, 27.05.03** vor der großen Übung.

**Aufgabe 1 (Wege und Schnitte):**
Sei $G$ ein Graph (gerichtet oder ungerichtet) mit Gewichten $c : E(G) \to \mathbb{Z}_+$ und zwei Knoten $s, t \in V(G)$, wobei $t$ von $s$ aus erreichbar ist. Zeige, dass die minimale Länge eines $s$-$t$ Weges gleich der maximalen Anzahl von Schnitten ist, die $s$ und $t$ trennen, so dass jede Kante $e$ in höchstens $c(e)$ solcher Schnitte enthalten ist.

(Tipp: Gib zunächst ein einfaches Argument an, warum es reicht, Graphen mit Einheitsgewichten zu betrachten. Zeige dann zum einen, dass die maximale Anzahl von solchen Schnitten durch die minimale Länge nach oben beschränkt ist; zum anderen konstruiere mit Hilfe eines BFS-Baumes eine Familie von disjunkten Schnitten, die diesen Wert tasächlich erreicht.)

(15 Punkte)

**Aufgabe 2 (Zweitkürzester Weg):**
Gegeben seien ein Digraph $G$ mit Gewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ und zwei Knoten $s, t \in V(G)$. Der kürzeste Weg $P$ von $s$ nach $t$ sei eindeutig. Wie kann man den kürzesten, von $P$ verschiedenen Weg von $s$ nach $t$ in polynomialer Zeit bestimmen? (15 Punkte)

**Aufgabe 3 (Wege und Zuverlässigkeit):**
Gegeben sei ein Digraph $G$ mit $s, t \in V(G)$. Jeder Kante $e \in E(G)$ wird eine Zahl $r(e) \in [0, 1]$, ihre Zuverlässigkeit, zugewiesen; dies entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Kante tatsächlich zur Verfügung steht, wenn sie gebraucht wird. Nimmt man an, dass diese Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Kanten unabhängig ist, dann ist die Zuverlässigkeit eines Weges ist das Produkt der Zuverlässigkeiten seiner Kanten. Gesucht ist der Weg von $s$ nach $t$ mit maximaler Zuverlässigkeit.

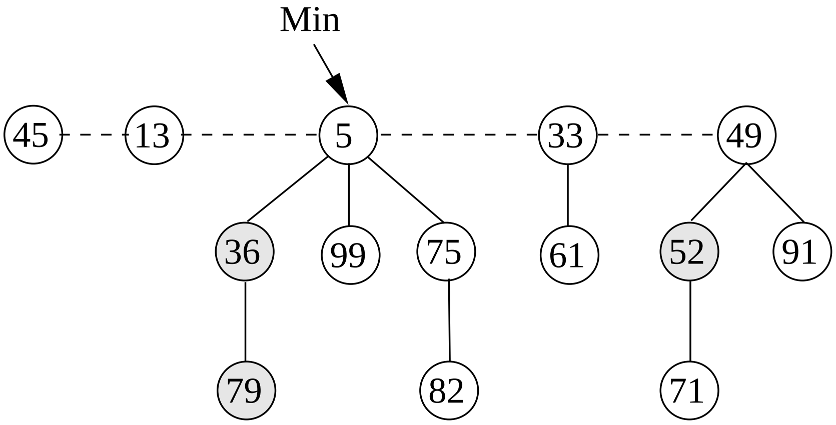
a) Zeige, dass man dieses Problem unter Anwendung von Logarithmen auf das Kürzeste-Wege-Problem reduzieren kann.

b) Löse dieses Problem in polynomialer Zeit ohne die Anwendung von Logarithmen.

(15 Punkte)

**Aufgabe 4 (Fibonacci-Heaps):**
Fibonacci-Heaps erlauben eine effiziente Implementation des Kürzeste-Wege-Algorithmus von Dijkstra. Links mit detailierten Erläuterungen von Fibonacci-Heaps sind im Web auf der Vorlesungsseite `http://www.math.nat.tu-bs.de/~fekete/disc.html` verfügbar.

Im folgenden Fibonacci-Heap wurden markierte Knoten grau dargestellt.




Führe nacheinander (also jeweils auf dem Vorergebnis) die Operationen

INSERT(42), DELETE_MIN, DECREASE_KEY(91 to 60), DECREASE_KEY(71 to 61)

auf dem angegebenen Fibonacci-Heap aus, und stelle den jeweils resultierenden Fibonacci-Heap (gegebenenfalls mit Zwischenstadien) graphisch dar.

(15 Punkte)