Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

SS 2003

Diskrete Optimierung
Übung 5 vom 13.05.03

Abgabe der Aufgaben bis 15:00 Uhr am **Dienstag, 20.05.03** vor der großen Übung.

Aufgabe 1 (Kurze Bäume und kurze Wege):
Gib jeweils ein Beispiel für eine in r verwurzelte Arboreszenz an, die

(a) minimales Gesamtgewicht hat, aber nicht für alle Knoten kürzeste Wege liefert.

(b) für alle Knoten kürzeste Wege liefert, aber nicht minimales Gesamtgewicht hat.

(5 Punkte)

Aufgabe 2 (Abbiegerestriktionen):
In vielen Graphen im wirklichen Leben kommt es beim Verlassen eines Knotens darauf an, durch welche Kante man ihn betreten hat. (Zum Beispiel kann an gewissen Kreuzungen das Linksabbiegen verboten sein.)

Beschreibe, wie ein gegebener Digraph G mit Kantenkosten in einen anderen (!) Digraphen G' umgewandelt werden kann, so dass die Wege in G' genau den erlaubten Routen in G entsprechen, und umgekehrt. (15 Punkte)

Aufgabe 3 (Zahlen von Kantenfolgen):
Sei $G = (V, E)$ mit $V := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Die dazugehörige Adjazenzmatrix $A = (a_{ij}) \in \{0,1\}^{n\times n}$ wird definiert als

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zeige:

(a) Die Elemente $a_{ij}^{[2]}$ der Matrix $A^2 = A \cdot A =: (a_{ij}^{[2]})$ geben die Anzahl aller Kantenfolgen der Länge 2 von v_i zu v_j an (für $i \neq j$).

(b) Die Diagonalelemente der Matrix A^2 erfüllen $a_{ii}^{[2]} = \delta(v_i)$. (Wie passt dies mit (a) zusammen?)

(c) Die Elemente $a_{ij}^{[p]}$der Matrix A^p geben die Anzahl aller Kantenfolgen der Länge p von v_i nach v_j an. (20 Punkte)

Aufgabe 4 (Kürzeste Wege):
Betrachte den folgenden gewichteten Graphen:

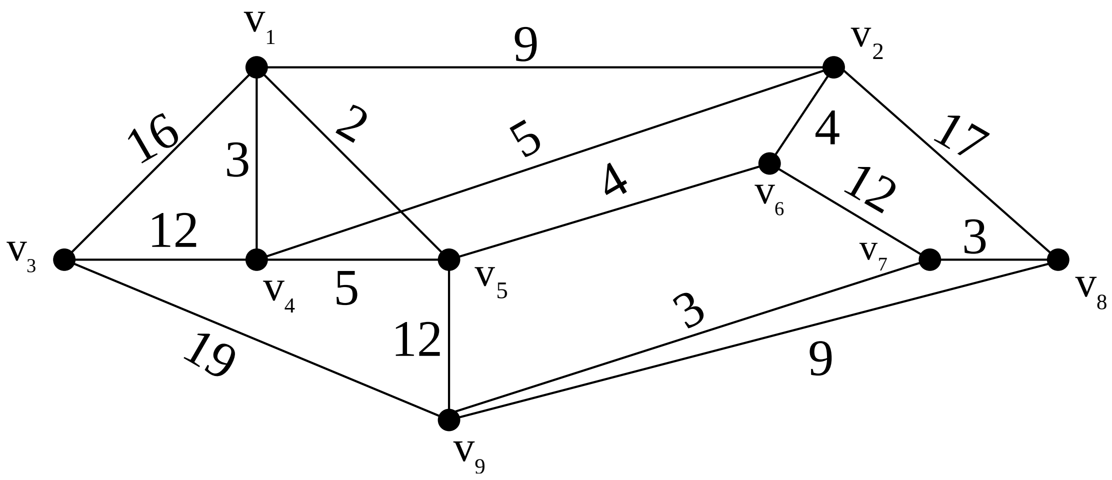

Abbildung 1: Ein gewichteter Graph

(a) Bestimme einen Kürzeste-Wege-Baum im gewichteten Graphen mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra. (Gib dabei in geeigneter Form die wesentlichen Zwischenschritte an. Wie viele derartige Zwischenschritte werden vorgenommen?)

(b) Bestimme einen Kürzeste-Wege-Baum im gewichteten Graphen mit Hilfe des Algorithmus von Moore-Bellman-Ford. (Gib dabei in geeigneter Form die wesentlichen Zwischenschritte an. Wie viele derartige Zwischenschritte werden vorgenommen?)

(20 Punkte)