Institut für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

WS 06/07

Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

Fortgeschrittene Lineare Optimierung
Übung 5 vom 30.11.2006

(Abgabe bis zum 7.12.2006, 13:00 durch Einwurf in den Übungskasten im dritten Stock des Forumsgebäudes **vor** dem Raum F 310)

Aufgabe 1 (Ein Versandproblem):
Betrachte das Transportnetzwerk in Abbildung 1 und das zugehörige Versandproblem.

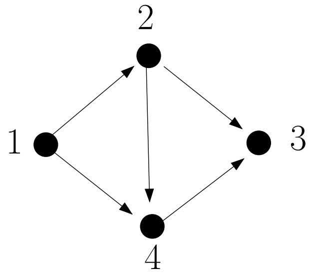

Abbildung 1: Ein Transportnetzwerk

Die Bilanzen an den Knoten sind die folgenden: $b(1) = -3$, $b(2) = 3$, $b(3) = 1$ und $b(4) = -1$. Die Kosten sind für alle Kanten gleich 3. Betrachte bei der Auswahl der Kante, die in den Baum aufgenommen werden soll, die folgende Sortierung und wähle jeweils die erste mit negativen reduzierten Kosten: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(4, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$. Kommen zwei Kanten in Frage, die aus dem Baum entfernt werden können, wähle die, die zu dem Knoten mit dem größten Index inzident ist. Löse dieses Versandproblem mit dem Netzwerk-Simplexverfahren.

(10 Punkte)

Aufgabe 2 (Stark zulässige Bäume):
Damit der Netzwerk-Simplexalgorithmus eine endliche Laufzeit bekommt, muss man die Kante e die neu in den Baum aufgenommen werden soll auf eine spezielle Weise wählen. Dazu führt man eine Wurzel für die betrachteten Bäume (Basislösungen) ein. Die Wurzel ist ein beliebiger Knoten aus $V(G)$ (der Knotenmenge des Netzwerkes). Diese Wurzel wird zu Beginn des Algorithmuses fest gewählt und bis zum Ende beibehalten. In diesem Zusammenhang wird auch der Begriff des stark zulässigen Baumes eingeführt:

Ein Baum T (zu einer Basislösung) heißt stark zulässig, wenn jede Kante $(i, j) \in T$ mit $x_{ij} = 0$ von der Wurzel weg zeigt, d.h. auf dem eindeutigen Pfad von der Wurzel zum Knoten j in positiver Richtung (oder auch vorwärts) durchlaufen wird.

Zeige: Aus jeder zulässigen Basislösung kann eine stark zulässige Basislösung konstruiert werden oder das Problem kann in zwei unabhängige Teilprobleme aufgespalten werden.

(Hinweis: Wähle eine Kante (i, j) die zur Wurzel zeigt und für die $x_{i,j} = 0$ ist (falls es eine solche Kante gibt). Betrachte nun die beiden Zusammenhangskomponenten R und S von $T - (i, j)$. Zeige mit Hilfe dieser Unterteilung, dass entweder zwei unabhängige Teilprobleme enstanden sind oder die Kante (i, j) durch eine andere Kante ausgetauscht werden kann. Folgere daraus die gewünschte Aussage.)

(20 Punkte)