Institut für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

WS 06/07

Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

Fortgeschrittene Diskrete Optimierung
Übung 7 vom 21.12.2006

(Abgabe bis zum 11.01.2007, 13:00 durch Einwurf in den Übungskasten im dritten Stock des Forumsgebäudes **vor** dem Raum F 310)

Aufgabe 1 (3-reguläre Graphen):
Ein Graph heißt *3-regulär*, wenn jeder Knoten Grad 3 hat. Eine *Brücke* in einem Graphen ist eine Kante, nach deren Entfernen sich die Anzahl der Zusammenhangskomponenten um eins vergrößert hat. Anders ausgedrückt: Ein Graph ohne Brücke ist 2-zusammenhängend.
Zeige: Jeder 3-reguläre Graph ohne Brücke enthält ein perfektes Matching.
(Tipp: Verwende den Satz von Tutte.)

(25 Punkte)

Aufgabe 2 (Santa Claus und das Snow-Blower-Problem):

„Hmmm, hmmm, hmmm“, brummte Santa Claus in seinen Bart. Hätte er bloß nie auf diese Unternehmensberater gehört. „Ein Fahrzeug mit Kufen benutzt heutzutage niemand mehr, der Verschleiß ist einfach zu groß. Und außerdem, Schnee ist sowieso nur ein temporäres Phänomen, in 20 Jahren redet niemand mehr davon. Tja, Mr. Claus, da gibt es ordentliches Einsparpotential und im Bezug auf die Geschwindigkeit ist beim Wechsel von Kufen auf Reifen auch noch einiges rauszuholen!“, hatten sie ihm vorgerechnet. Danach waren noch jede Menge Einzelheiten dargestellt worden, die er aber nicht so richtig verstanden hatte. Nach den Regeln der Physik hätte er wohl schon in den Vorjahren einfach verglühen müssen... Letztendlich hatte er sich dann für vier neue Winterreifen (mit besonders hohem Schmelzpunkt) für seinen Schlitten entschieden.

Aber im Moment brauchte er sich über Höchstgeschwindigkeiten gar keine Gedanken machen; er kam noch nicht einmal mit seinem Schlitten aus der Garage. In der Nacht hatte es einen Meter Schnee gegeben. Mit Kufen wäre das kein Problem gewesen, aber mit Rädern – keine Chance. Da fiel im ein, dass er irgendwo auf seinem Schlitten eine Schneefräse (Snow-Blower hatte auf dem Wunschzettel gestanden) für jemanden in New York haben müsste. Der wollte damit einige Experimente machen. „Wie auch immer – dieses Ding könnte ihm doch helfen. Ich brauche ja auch nur meine Einfahrt zuräumen, die Straße ist frei“, murmelte er in seinen weißen Bart.

Nachdem er den Snow-Blower gefunden hatte, las er sich die Gebrauchsanweisung durch und stellte fest, dass Schnee bis zu einer Höhe von maximal einem Meter beseitigt werden kann – Glück gehabt. Ausserdem konnte der Snow-Blower den Schnee nur nach rechts (in Fahrtrichtung gesehen) wegräumen. Um keine Zeit zu verschenken machte er sich eine Skizze von seiner Einfahrt (Abb. 1) und wollte noch kurz die optimale Räum-Strategie bestimmen bevor es losging. Aber so einfach war das ja gar nicht, stellte er fest. „Dann nochmal in Ruhe“, dachte er, und formulierte das Problem ganz “mathematisch”:

Gegeben: Ein 3×3-Gitter sowieso eine Garage, ein Snow-Blower und eine Einheit Schnee auf jedem Gitterfeld. Der Snow-Blower kann Schnee von maximal einer Einheit um ein Feld nach rechts werfen (immer in Fahrtrichtung gesehen) und sich horizontal und vertikal von Feld zu Feld bewegen. Wenn der Schnee über den Rand des 3×3-Gitters geworfen ist, ist er geräumt (um die Höhe des dortigen Schneeberges braucht man sich keine Gedanken machen). Der Snow-Blower selbst darf den Bereich (3×3-Gitter + Garage) nicht verlassen.

Gesucht: Eine optimale Strategie, die den Schnee aus dem gesamten 3×3 Gitter entfernt (über den Rand befördert), dabei keinen Schnee in die Garage wirft und danach wieder in die Garage zurückkehrt.

Folgende Aufgaben gilt es also zu lösen:

a) Finde eine Strategie, die möglichst wenige Schritte benötigt.

b) Zeige, dass deine Strategie optimal ist, d.h., dass es keine Strategie gibt, die mit weniger Schritten auskommt.

(Hinweis: Um Teil b) zu beantworten ist es sinnvoll, sich einige Eigenschaften zu überlegen, die die optimale Tour erfüllen muss und damit dann eine untere Schranke für die Länge der optimalen Tour anzugeben. Insbesondere sollten nicht alle Touren enumeriert und verglichen werden.)

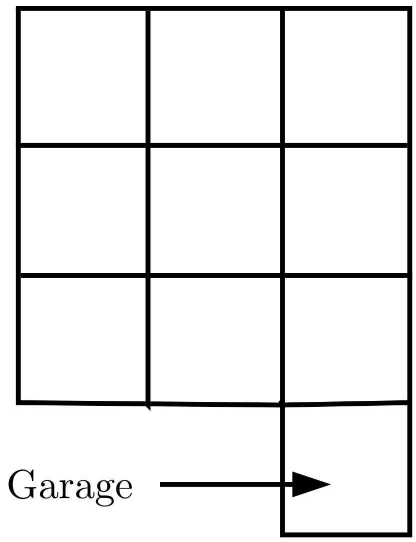
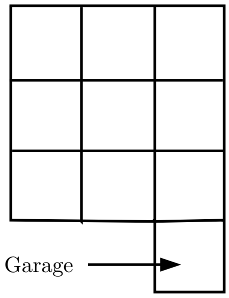
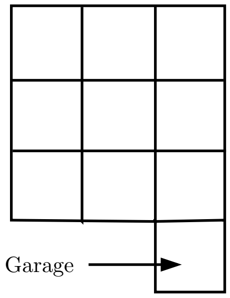
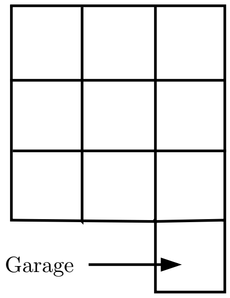
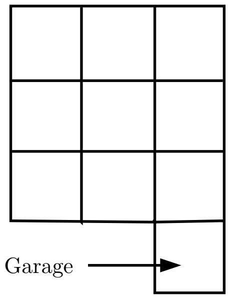
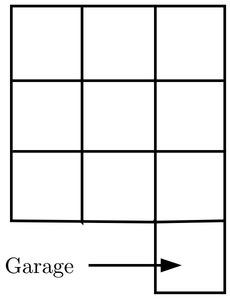
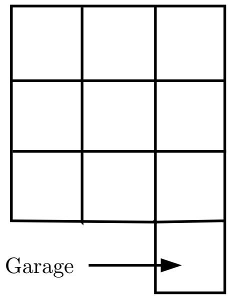
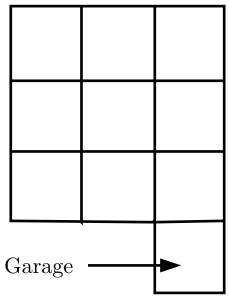
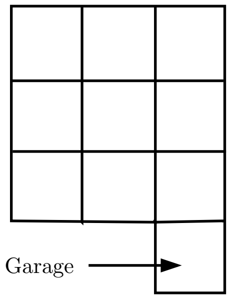
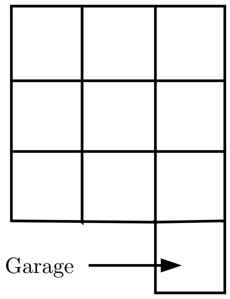


Abbildung 1: Die Einfahrt mit Garage vorm Haus des Weihnachtsmannes.

(10+25 Punkte)

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr!


Garage

Garage

Garage

Garage

Garage

Garage

Garage

Garage

Garage