Institut für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

WS 06/07

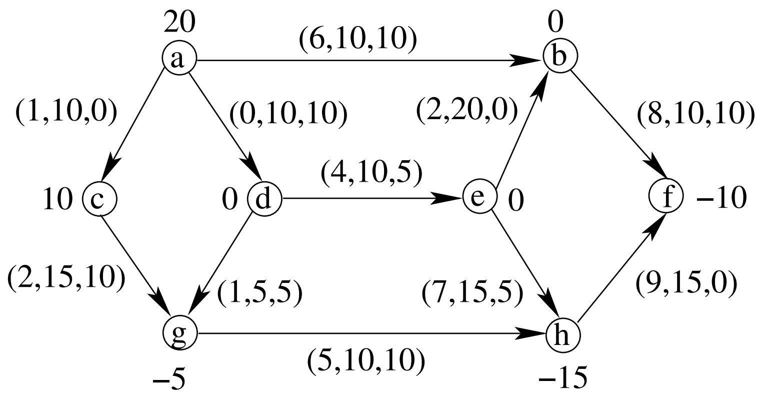
Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

Fortgeschrittene Diskrete Optimierung
Übung 4 vom 30.11.2006

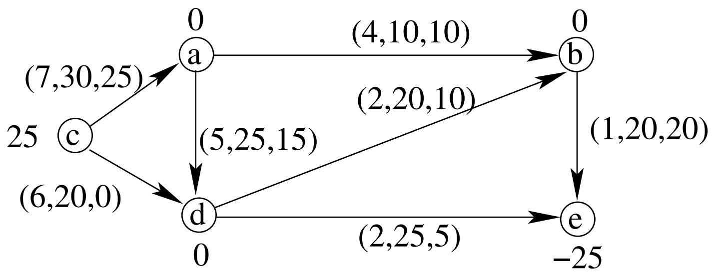
(Abgabe bis zum 07.12.2006, 13:00 durch Einwurf in den Übungskasten im dritten Stock des Forumsgebäudes **vor** dem Raum F 310)

Aufgabe 1 (Min-Cost-Flow Probleme):
Betrachte die in Abbildung 1 gezeigten Min-Cost-Flow-Probleme (a) und (b). Die Zahlen an den Kanten stehen für Kosten, Kapazität, Fluss und die Zahlen an den Knoten für die Nachfrage. Entscheide, ob die jeweiligen gezeigten Flussvektoren optimal sind.

(Hinweis: Für den Beweis der Optimalität reicht es zu sagen, dass etwas nicht gefunden werden kann.)



(a)



(b)

Abbildung 1: Min-Cost-Flow Probleme mit jeweiligen Flüssen

(10 Punkte)

Aufgabe 2 (Zirkulationstheorem von Hoffman (1960)):
Beweise das Zirkulationstheorem von Hoffman: Gegeben sei ein Digraph mit unteren und oberen Kapazitäten $l, u : E(G) \to \mathbb{R}_+$ wobei $l(e) \leq u(e)$ für alle Kanten $e \in E(G)$. Zeige, dass eine Zirkulation f mit $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$ für alle Kanten $e \in E(G)$ genau dann existiert, wenn

$$\sum_{e \in \delta^-(X)} l(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \quad \text{für alle Teilmengen } X \subseteq V(G).$$

(30 Punkte)

Aufgabe 3 (Tranportproblem):
In dieser Aufgabe soll ein Teil des Beweises von Satz 2.2 aus der Vorlesung gemacht werden. Hier nochmal die Aussage des Satzes: Jede Instanz des Problems *kostenminimaler Fluss* lässt sich als Transportproblem mit $n + m$ Knoten und $2m$ Kanten formulieren.

Die Transformation des Problems *kostenminimaler Fluss* wurde in der Vorlesung beschrieben. Nun soll gezeigt werden, dass aus einem zulässigen Fluss f in G immer ein zulässiger Fluss f' in G' wie folgt definiert werden kann: $f'(e, y) := f(e)$, $f'(e, x) := u(e) - f(e)$ für $e = (x, y) \in E(G)$. Zeige außerdem, dass $c(f) = c(f')$ gilt. (Die Konstruktion des Transportproblems kann man im Buch von Korte und Vygen zu Beginn des Kapitels 9 nachlesen.)

(20 Punkte)