Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

Fortgeschrittene Diskrete Optimierung
Übung 2 vom 16.11.2006

(Abgabe bis zum 23.11.2006, 13:00 durch Einwurf in den Übungskasten im dritten Stock des Forumsgebäudes **vor** dem Raum F 310)

Aufgabe 1 (Push-Relabel-Algorithmus):
Betrachte das in Abbildung 1 gezeigte Netzwerk und bestimme mit dem Push-Relabel-Algorithmus einen maximalen Fluss von s nach t.

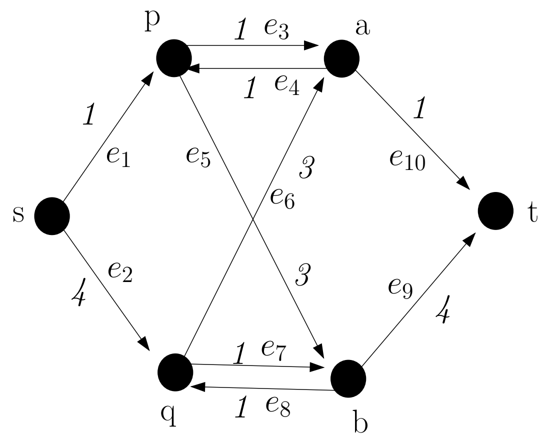

Abbildung 1: Ein Netzwerk mit Kapazitäten für jede Kante.

(Der Eindeutigkeit zuliebe verwende dabei bitte folgende Auswahlregel: Verwende einen aktiven Knoten v mit maximalem Distanzlabel $\psi(v)$. Unter den Knoten mit dieser Eigenschaft, wähle jeweils den alphabetisch ersten. Der erste Push sollte auf der Kante e_5 erfolgen.)

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Maximaler s-t-Fluss):
Wir betrachten folgendes lineares Programm für ein Netzwerk (G,u,s,t):

$$\begin{array}{lrcll}
\max & \sum_{e\in\delta^+(s)} f(e) - \sum_{e\in\delta^-(s)} f(e) & & & \\
\text{unter} & \sum_{e\in\delta^+(v)} f(e) - \sum_{e\in\delta^-(v)} f(e) & = & 0 & \forall\, v \in V \setminus \{s,t\} \\
 & f(e) & \leq & u(e) & \forall\, e \in E \\
 & f(e) & \geq & 0 & \forall\, e \in E
\end{array}$$

Wie aus der Vorlesung bekannt, beschreibt die Optimallösung einen maximalen s-t-Fluss. Dualisiere das LP und begründe dabei jeweils kurz mit eigenen Worten, wie sich die Zielfunktion, die Restriktionen und die Beschränktheit oder Unbeschränktheit der Variablen ergeben.

(25 Punkte)

Aufgabe 3 (Perfektes Matching in bipartiten Graphen):
Ein perfektes Matching $M \subseteq E$ ist eine Menge von paarweise nicht-adjazenten Kanten, wobei zu jedem Knoten *genau eine* dieser Kanten inzident sein muss. Zeige, in einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = V_1 + V_2$ in dem jeder Knoten *genau* Grad $k \geq 1$ hat, gibt es ein perfektes Matching. Benutze hierzu die Flussformulierung für bipartites Matching (Blatt 1 Aufgabe 2) und argumentiere über die Größe eines minimalen s-t-Schnittes. Wende danach Max Flow = Min Cut an.

(20 Punkte)