Institut für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

WS 06/07

Fortgeschrittene Diskrete Optimierung
Übung 1 vom 09.11.2006

(Abgabe bis zum 16.11.2006, 13:00 durch Einwurf in den Übungskasten im dritten Stock des Forumsgebäudes **vor** dem Raum F 310)

Aufgabe 1 (Ford-Fulkerson-Algorithmus und irrationale Kapazitäten):

Zeige, dass der Ford-Fulkerson-Algorithmus nicht terminieren muss, wenn er auf ein Netzwerk mit irrationalen Kapazitäten angewendet wird.

Betrachte dafür das Netzwerk in Abbildung 1. Jedes Segment ab stellt die zwei gerichteten Kanten (a, b) und (b, a) dar. Die Kanten haben die Kapazität $\frac{1}{1-\sigma}$ mit einigen Ausnahmen:

$$u((x_1, y_1)) = 1, u((x_2, y_2)) = \sigma, u((x_3, y_3)) = u((x_4, y_4)) = \sigma^2,$$

wobei $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Zeige zunächst, dass $\sigma^n = \sigma^{n+1} + \sigma^{n+2}$. (Dieses Beispiel stammt von Ford und Fulkerson aus dem Jahr 1962).

(Tipp: Zeige, dass der Fluss im n-ten Schritt um σ^n erhöht wird.)

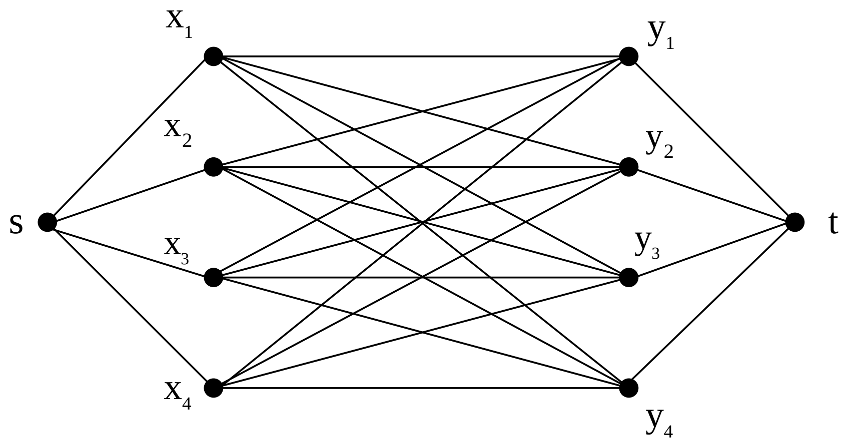

Abbildung 1: Ein Netzwerk mit irrationalen Kapazitäten.

(25 Punkte)

Aufgabe 2 (Kantendisjunkte Pfade):

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$ und $k \in \mathbb{N}$. Zwei Pfade P und Q heißen kantendisjunkt, wenn sie keine gemeinsame Kante haben.
Zeige: Es gibt genau dann k kantendisjunkte s-t-Pfade in G wenn, es nach dem Entfernen von (beliebigen) $k - 1$ Kanten aus G noch einen s-t-Pfad gibt.

(Tipp: Wende Max Flow = Min Cut auf ein geeignetes Netzwerk an.)

(20 Punkte)

Aufgabe 3 (Bipartites Maximum-Matching):

Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (V, E)$, $V = V_1 + V_2$. Ein Matching $M \subseteq E$ ist eine Menge von paarweise nicht-inzidenten Kanten. Das Bipartite Maximum-Matching Problem besteht darin, ein Matching maximaler Größe in einem bipartiten Graphen zu finden. Zeige, dass bipartites Maximum-Matching auf das Maximaler-Fluss-Problem zurückgeführt werden kann.

(Tipp: Konstruiere ein Netzwerk $G' = (V', E')$ mit $V' = V \cup \{s, t\}$,

$$E' \;=\; \{(s,u) | u \in V_1\} \;\cup\; \{(v,t) | v \in V_2\} \;\cup\; \{(u,v) | u \in V_1, v \in V_2, \{u,v\} \in E\}$$

und Einheitskapazitäten auf allen Kanten in E'.)

(15 Punkte)