Institut für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

WS 2005/2006

Einführung in die Mathematische Optimierung
Übung 11 vom 18.01.2006

(Abgabe bis zum 25.01.2006, 13:00 durch Einwurf in den Übungskasten im dritten Stock des Forumsgebäudes **vor** dem Raum F 310)

Aufgabe 1 (Duale Simplexmethode und Gomory Cuts):

Betrachte das ganzzahlige Programm

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & 4x_1 & + & x_2 & & \\
\text{unter} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & \frac{23}{2} \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & \frac{9}{2} \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}\,.
\end{array}$$

Zeichne ein Bild, um Teil a) zu beantworten:

a) Was ist der Optimalwert der linearen Relaxierung? Was ist der Optimalwert des ganzzahligen Problems?

b) Hier das optimale Simplextableau zur LP-Relaxierung:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
0	0	0	$-1/2$	0	$-7/2$	$-43/2$
0	0	1	$-1/2$	0	$3/2$	3
0	1	0	$1/2$	0	$-1/2$	$7/2$
0	0	0	$-1/2$	1	$1/2$	$1/2$
1	0	0	0	0	1	$9/2$

(Dabei bezeichnet s_i die Schlupfvariable zur i-ten Ungleichung.) Leite eine Gomory-Schnittebene aus der Zielfunktionszeile des Tableaus her. Füge die neue Restriktion zum Tableau hinzu und löse das neue LP. Zeichne den Schnitt in die in Teil a) erstellte Zeichnung ein. Dazu muss man die neue Restriktion in Abhängigkeit von x_1 und x_2 ausdrücken. Eine Möglichkeit hierfür ist, dass man aus der Standardform des Problems Gleichungen für die Variablen die im Cut auftauchen herleitet und einsetzt.

(10+20 Punkte)

Aufgabe 2 (Unimodulare Matrizen und Ganzzahligkeit):

Eine Matrix A heißt *total unimodular*, wenn die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A einen der Werte -1, 0 oder 1 hat.

a) Gegeben sei folgende 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A total unimodular? Begründe die Aussage.

b) Gegeben sei die Matrix A aus Teil a). Zeige, dass für alle ganzzahligen Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$, für die $P(b) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$ nicht leer ist, alle Ecken von $P(b)$ ganzzahlig sind.
Das heißt, LPs mit einer total unimodularen Matrix A haben immer eine ganzzahlige Optimallösung, welche dann natürlich auch Optimallösung des zugehörigen IPs ist.

(10+20 Punkte)