

Einführung in die Mathematische Optimierung Übung 8 vom 14.12.2005

(Abgabe bis zum 21.12.2005, 13:00 durch Einwurf in den Übungskasten im dritten Stock des Forumsgebäudes **vor** dem Raum F 310)

Aufgabe 1 (Komplementärer Schlupf):

Gegeben sei das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{llllllll} \max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 \\ \text{unter} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & \geq & 0 \end{array}$$

- (a) Formuliere das duale Problem zu (P).
- (b) Formuliere die Bedingungen für komplementären Schlupf zu (P).
- (c) Prüfe mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine optimale Lösung von (P) ist. (Hinweis: Auch wenn man y nicht kennt, kann man Bedingungen herleiten, die ein y erfüllen muss, und dann konkrete Dinge berechnen.)

(7+7+16 Punkte)

Aufgabe 2 (Vertex Cover und Matching):

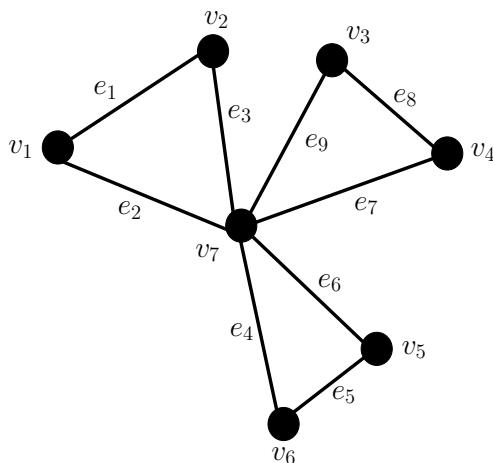


Abbildung 1: Eine Instanz von Vertex Cover und Matching: ein konkreter Graph

- a) Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Formuliere das Maximum-Matching-Problem (für allgemeine Graphen) als ganzzahliges lineares Programm. Formuliere nun die zugehörige LP-Relaxierung.
- b) Bilde das duale Problem zur LP-Relaxierung. Interpretiere die Lösungen des zugehörigen ganzzahligen linearen Programmes graphentheoretisch.
- c) Nun betrachten wir die konkrete Instanz aus Abb. 1. Bilde die konkrete LP-Relaxierung für das Maximum-Matching-Problem und dualisiere sie.
- d) Der Weihnachtsmann schenkt Dir die folgende optimale Lösung für die Matching-LP-Relaxierung: $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$. Nun hätte er aber von Dir gerne eine optimale Lösung für die LP-Relaxierung des dualen Problems. Da er den Simplexalgorithmus nicht kennt und es nicht mag, einfach eine Lösung zu raten, musst Du dir etwas anderes überlegen. Komplementärer Schlupf und starke Dualität sind ihm vertraut, deshalb solltest Du diese für deine Lösung verwenden.
- e) Dem Osterhasen, der sich alles immer graphentheoretisch vorstellen muss um es zu verstehen, gefallen die bisherigen Ergebnisse gar nicht. (“Eine nicht-ganzzahlige Lösung für ein Matching Problem, wie soll man das denn interpretieren? $x_{e_1} = \frac{1}{2}$? Ist die Kante e_1 nun eine Matchingkante oder nicht?”) Finde also noch jeweils eine optimale Lösung für das primale ganzzahlige lineare Programm und eine für das duale ganzzahlige lineare Programm. Begründe jeweils, warum die Lösung optimal ist. Was fällt Dir auf? Wie kannst Du das dem Osterhasen erklären?

(6+6+4+7+7 Punkte)