

Einführung in die Mathematische Optimierung Übung 13 vom 14.07.2004

Abgabe bis zum 21.07.2004, 9:45 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock
des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Oberflächenoptimierung):

Es soll eine oben offene, quaderförmige Kiste mit einem Volumen von 1 m^3 gebaut werden. Dabei soll möglichst wenig Material verwendet werden. Wie müssen Länge, Breite und Höhe gewählt werden, damit die Gesamtfläche der fünf Wände möglichst klein wird?

(12 Punkte)

Aufgabe 2 (Kuhn-Tucker-Bedingungen):

Betrachte das Problem

$$\begin{array}{llll} \min & 2x_1^2 & + & 2x_1x_2 & + & x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\ \text{unter} & x_1^2 & + & x_2^2 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 6. \end{array}$$

- (a) Zeichne graphisch den zulässigen Bereich und kennzeichne jeweils die aktiven Restriktionen.
- (b) Untersuche nun die Kuhn-Tucker-Bedingungen. (Dafür muss man die vier möglichen Kombinationen von aktiven Restriktionen durchprobieren, jeweils Multiplikatoren berechnen und überprüfen, ob die Vorzeichen der Multiplikatoren und der inaktiven Restriktionen stimmen.)
- (c) Gib ein globales Minimum an, falls es eines gibt.

(4+12+4 Punkte)

Aufgabe 3 (Simplexverfahren und komplementären Schlupf):

Gegeben sei folgendes lineare Programm (P):

$$\begin{array}{llll} \min & 110x_1 & + & 51x_2 & + & 180x_3 \\ \text{unter} & x_1 & + & & & 3x_3 & \geq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\ & & & & & x_i & \geq & 0, \quad i = 1, \dots, 3. \end{array}$$

- (a) Formuliere das duale Problem (D) zu (P). Löse (D) mit der Simplexmethode. Benutze dabei folgende Pivotregel: als Pivotspalte wird jeweils die mit dem kleinsten negativen Kostenkoeffizienten gewählt.

(b) Löse (P) mit dem Satz vom komplementären Schlupf.

(10+10 Punkte)

Aufgabe 4 :

Sei $A = A^T$. Zeige, dass jede zulässige Lösung von $\min c^T x$ unter $Ax = c$ optimal ist.

(8 Punkte)