Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

SS 2004

Einführung in die Mathematische Optimierung
Übung 11 vom 30.06.2004

Abgabe bis zum 08.07.2004, 9:45 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Sekanten- und Newtonverfahren):

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 7x - 2$ auf dem Intervall $[2, 3]$. Auf diesem Intervall gibt es genau eine Nullstelle $\overline{x}$. Diese soll näherungsweise bestimmt werden.

(a) Verwende 5 Schritte des Bisektionsverfahrens.

(Dafür beginnt man mit den Intervallgrenzen $a_0 = 2$, $b_0 = 3$, man testet jeweils das Vorzeichen des Intervallmittelpunktes $x_i = \frac{a_{i-1}+b_{i-1}}{2}$ und man setzt je nach Vorzeichen die Intervallgrenzen so um, dass das neue kleinere Intervall die Nullstelle enthält.)

(b) Verwende 3 Schritte des Sekantenverfahrens.

(Dafür beginnt man wieder mit den Intervallgrenzen $a_0 = 2$, $b_0 = 3$. Hier testet man jeweils das Vorzeichen des x-Wertes x_i, für den die Gerade durch $(a_i, f(a_i))$ und $(b_i, f(b_i))$ die x-Achse schneidet. Für x_i lässt sich eine Formel in Abhängigkeit von a_i, b_i, $f(a_i)$, $f(b_i)$ aufstellen!)

(c) Verwende 3 Schritte des Newtonverfahrens.

(Dafür beginnt man wieder mit den Intervallgrenzen $a_0 = 2$, $b_0 = 3$. Hier setzt man für b_{i+1} den x-Wert, für den die Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(b_i, f(b_i))$ die x-Achse schneidet. Dafür ergibt sich die Formel $b_{i+1} = b_i - \frac{f(b_i)}{f'(b_i)}$.)

(d) Bestimme die exakte Lösung (Raten auf der Basis der Näherungslösungen und Verifizieren reicht!) und beurteile die Näherungslösungen im Vergleich.

(5+5+5+5 Punkte)

Aufgabe 2 (Fibonacci-Suche):

Betrachte die Funktion $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

(a) Zeige durch Betrachtung von Ableitungen: f ist unimodal.

(b) Führe eine Fibonacci-Suche mit Startintervall $[-2, 2]$ und $n = 8$ zur Bestimmung des Minimums von f durch!

(Dazu bestimmt man zunächst die ersten 8 Fibonacci-Zahlen. Das Startintervall $[a_0, b_0] = [-2, 2]$ wird dann unterteilt im Verhältnis der Zahlen F_n und F_{n-1} und man erhält so den Testpunkt x_0. Das größere der beiden Intervalle unterteilt man im

Verhältnis der Fibonacci-Zahlen F_{n-1} und F_{n-2} und erhält so y_0. Von den dadurch entstehenden drei Intervallen kann man eines (durch Vergleichen der Funktionswerte) für die Lage des Minimums ausschließen. Dadurch erhält man die neuen Intervallgrenzen a_1 und b_1 und den inneren Testpunkt x_1, der $[a_1, b_1]$ im Verhältnis F_{n-1} zu F_{n-2} unterteilt. Nun fährt man entsprechend fort, bis x_{n-2} das Intervall $[a_{n-2}, b_{n-2}]$ im Verhältnis F_2 zu F_1 teilt, also in der Mitte des Restintervalles liegt.)

Die nötigen Funktionsberechnungen können mit einem Taschenrechner auf ausreichend viele Dezimalstellen durchgeführt werden.

(6+14 Punkte)

Aufgabe 3 (Richtungen bei steilstem Abstieg):

Sei $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und sei $x_0 \in X$. Betrachte folgendes iteratives Verfahren zur Auffindung eines Minimums von f:

Solange keine numerische Abbruchbedingung (über Zeit oder Genauigkeit) erfüllt ist und $0 \neq \nabla f \in D(x_i)$ ist, setze $d_i = -\nabla f(x_i)$ und bestimme x_{i+1}, so dass

$$f(x_{i+1}) = \min \{f(x) \mid x = x_i + \lambda d_i, \lambda \geq 0\}.$$

Da der negative Gradient die Richtung ist, in der sich der Funktionswert lokal am stärksten verringert, nennt man diese Vorgehensweise auch die *Methode des steilsten Abstiegs* – man rollt gewissermaßen in der steilsten Richtung den Hang hinunter, in der Hoffnung, dass man so am schnellsten am Talboden ankommt.

(a) Wende das Verfahren auf die Funktion $\frac{1}{4}x^2 + y^2 - 8x - 12y$ mit dem Startpunkt $(2, 2)$ an und führe vier Iterationen durch.

(b) Zeige für jedes beliebige f und i: d_i und d_{i+1} stehen senkrecht aufeinander. Speziell für $n = 2$ steht die Folge der Richtungen also bis auf das Vorzeichen bereits mit d_0 fest.

(12+8 Punkte)