Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

SS 2004

Einführung in die Mathematische Optimierung
Übung 10 vom 23.06.2004

Abgabe bis zum 01.07.2004, 9:45 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

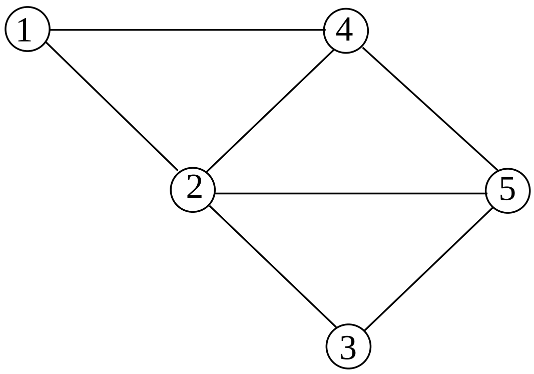
Aufgabe 1 (Kardinalitätsmatching und Dualität):

(a) Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Betrachte folgendes lineares Programm (P):

$$\begin{array}{llcll} \max & \sum\limits_{e \in E} x_e & & & \\ \text{unter} & \sum\limits_{e \in \delta(v)} x_e & \leq & 1, & \text{für alle Knoten } v \in V \\ & x_e & \geq & 0, & \text{für alle Kanten } e \in E. \end{array}$$

Zeige, dass jede ganzzahlige Lösung von (P) einem Matching in G entspricht.

(b) Gib zum folgenden Graphen das lineare Programm (P) explizit an. Gib dazu eine



optimale ganzzahlige Lösung und den dazugehörigen Optimalwert z_M an. Gib eine fraktionale Lösung an, deren Wert grösser als z_M ist.

(c) Betrachte das lineare Programm in Aufgabe 1.b) und leite dazu das duale lineare Programm her. Gib eine optimale ganzzahlige Lösung und eine optimale fraktionale Lösung zu diesem dualen Programm an.

(d) Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ leite das zu (P) duale lineare Programm (D) her. Gib eine Interpretation von (D) als Optimierungsproblem an. Was sind die ganzzahligen Lösungen ?

(3+4+6+7 Punkte)

Aufgabe 2 (Komplementärer Schlupf):

Gegeben sei das folgende lineare Programm (P):

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & \geq & 0
\end{array}
$$

(a) Formuliere das duale Problem zu (P).

(b) Formuliere die Bedingungen für komplementären Schlupf zu (P).

(c) Prüfe mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $x_* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine optimale Lösung von (P) ist. (Hinweis: Auch wenn man y nicht kennt, kann man Bedingungen herleiten, die ein y erfüllen muss, und dann konkrete Dinge berechnen.)

(5+5+10 Punkte)

Aufgabe 3 (Primales und duales Polyeder):

Gib ein lineares Programm an, dessen primales und duales Polyeder leer sind, oder zeige, dass so etwas nicht möglich ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Dualität):

Was ist an der folgenden Argumentation falsch ? Gib für jede Abschätzung an, ob sie richtig oder falsch ist. Begründe jeweils Deine Aussage.

Es gilt (durch Anwendung von schwacher Dualität bzw. einfacher Abschätzungen):

$$
\begin{aligned}
\max\{\, c^T x \;:\; Ax \leq b, x \geq 0 \,\} &\leq \min\{\, y^T b \;:\; y^T A \geq c^T, y \geq 0 \} \\
&\leq \max\{\, y^T b \;:\; y^T A \geq c^T, y \geq 0 \,\} \\
&\leq \min\{\, c^T x \;:\; Ax \geq b, x \leq 0 \,\} \\
&\leq \max\{\, c^T x \;:\; Ax \geq b, x \leq 0 \,\} \\
&\leq \min\{\, y^T b \;:\; y^T A \leq c^T, y \leq 0 \,\} \\
&\leq \max\{\, y^T b \;:\; y^T A \leq c^T, y \leq 0 \,\} \\
&\leq \min\{\, c^T x \;:\; Ax \leq b, x \geq 0 \,\} \\
&\leq \max\{\, c^T x \;:\; Ax \leq b, x \geq 0 \,\}
\end{aligned}
$$

Also gilt überall Gleichheit und es macht keinen Unterschied, ob man maximiert oder minimiert.

(10 Punkte)