Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

SS 2004

Einführung in die Mathematische Optimierung
Übung 8 vom 08.06.2004

Abgabe bis zum 17.06.2004, 9:45 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Lineare Optimierung nur mit Gleichheitsrestriktionen):

Wie wir gesehen haben, gibt es viele gleichwertige Formulierungen für Lineare Optimierungsprobleme – mit und ohne Gleichheitsrestriktionen. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass Probleme *nur* mit Gleichheitsrestriktionen eher langweilig sind.

(a) Zeige: $\exists x \in \mathbb{K}^n : Ax = b \Longleftrightarrow (\forall u \in \mathbb{K}^m : u^\top A = 0 \Longrightarrow u^\top b = 0)$
(Tipp: Benutze das bekannte Kriterium für die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen. Für eine Richtung der Aussage beweise, dass entweder $(\exists x \in \mathbb{K}^n : Ax = b)$ oder $(\exists u \in \mathbb{K}^m : u^\top A = 0, u^\top b = 1)$ gilt.)

(b) Zeige, dass genau eine der folgenden Alternativen für das LP

$$\max_{Ax=b} c^\top x$$

zutrifft. Es ist entweder unzulässig oder zulässig und unbeschränkt oder zulässig und die Zielfunktion ist konstant auf $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$.

(8+12 Punkte)

Aufgabe 2 (Simplexverfahren):

Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 9x_2 & & \\
\text{unter} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 15 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & \geq & -6 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

a) Löse das Programm zeichnerisch.

b) Löse das Programm durch Anwendung des Simplexverfahrens. Benutze dabei folgende Pivotregel: als Pivotspalte wird jeweils die mit dem kleinsten negativen Kostenkoeffizienten gewählt. Gib nach jedem Schritt den Wert der Zielfunktion in der gefundenen Basislösung an. Zeichne in der graphischen Darstellung des Problems den Pfad der Simplex-Schritte ein.

c) Wiederhole Teil b) für das Problem

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(5+12+8 Punkte)

Aufgabe 3 (Lösungsmenge linearer Optimierungsprobleme):

(a) Für welche Werte $s, t \in \mathbb{R}$ hat das folgende Problem keine Lösung, für welche mindestens eine optimale Lösung, für welche genau eine optimale Lösung und für welche ist es unbeschränkt?

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & sx_1 & + & tx_2 & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

b) Konstruiere ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Restriktionen und einer degenerierten Basislösung. Erläutere Deine Konstruktion anhand einer Zeichnung.

(8+7 Punkte)