Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

SS 2004

Einführung in die Mathematische Optimierung
Übung 6 vom 17.05.2004

Abgabe bis zum 27.05.2004, 9:45 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Turmpackungen und Matching):

Eine endliche zusammenhängende Teilmenge aus Einheitsquadraten ("Pixeln") des unendlichen Schachbrettes ist ein *Polyomino*. Ein *Streifen* innerhalb eines Polyominos ist eine zusammenhängende Teilmenge von Pixeln, die alle die gleiche x-Koordinate haben ("senkrechter Streifen") oder die gleiche y-Koordinate haben ("waagerechter Streifen"). Eine *Turmpackung* ist eine Menge von Pixeln, so dass keine zwei Pixel zum selben Streifen gehören. (Das entspricht also einer Menge von Türmen auf dem vom Polyomino bestimmten Brett, so dass keine zwei Türme sich gegenseitig schlagen können.) Eine *Streifenüberdeckung* ist eine Menge von Streifen, so dass jeder Pixel des Polyominos in mindestens einem Streifen enthalten ist.

(a) Zeige: Für jede Turmpackung T und jede Streifenüberdeckung S gilt $|T| \leq |S|$.

b) Bestimme eine maximale Turmpackung und eine minimale Streifenüberdeckung für das in Abbildung 1 gezeigte Polyomino. Warum gilt jeweils Optimalität?

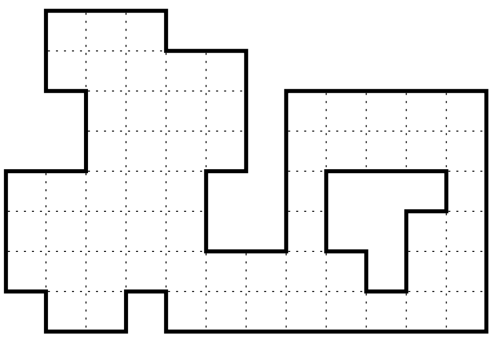

Abbildung 1: Ein Polyomino

(c) Reduziere das Problem, eine maximale Turmpackung in einem Polyomino B zu finden, auf ein Matching-Problem. (D.h., formuliere es als ein Matching-Problem in einem geeigneten bipartiten Graphen G_B, in dem die Streifen maximaler Länge und die Pixel repräsentiert sind.)

(d) Was entspricht im Polyomino B einem Vertex Cover im Graph G_B? Folgere damit aus einem Satz der Vorlesung: Für eine maximale Turmpackung T^* und eine minimale Streifenüberdeckung S^* gilt $|T^*| = |S^*|$.

(30 Punkte)

Aufgabe 2 (CLIQUE und INDEPENDENT SET):

Wir führen zwei klassische Vertreter **NP**-vollständiger Probleme ein.

Problem CLIQUE

Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $0 < k \leq |V|$.
Frage: Hat G eine Clique K mit mindestens k Knoten?
(D.h. hat G eine Menge $K \subseteq V$ von Knoten mit $|K| \geq k$,
so dass für alle $v, w \in K$ mit $v \neq w$ gilt, dass $\{v, w\} \in E$?)

Problem INDEPENDENT SET

Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $0 < k \leq |V|$.
Frage: Hat G eine unabhängige Menge U mit mindestens k Knoten ?
(D.h. hat G eine Menge $U \subseteq V$ von Knoten mit $|U| \geq k$,
so dass für alle $v, w \in U$ mit $v \neq w$ gilt, dass $\{v, w\} \notin E$?)

Zur Verdeutlichung betrachte folgende Abbildungen: eine *Clique* ist eine Menge paarweise verbundener Knoten (siehe Abbildung 2), und eine *unabhängige Menge* ist eine Menge paarweise nicht verbundener Knoten (siehe Abbildung 3).

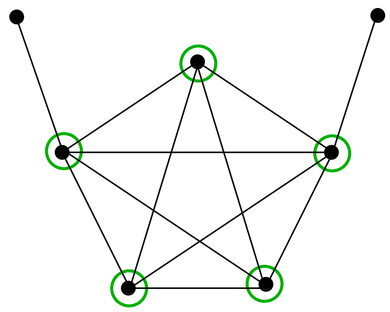

Abbildung 2: Eine Clique

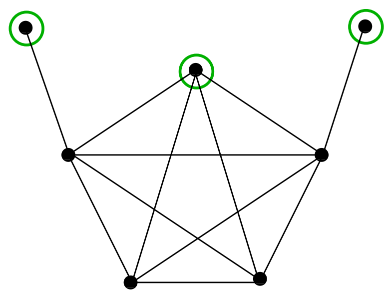

Abbildung 3: Eine unabhängige Menge

Zum Beweis der **NP**-Vollständigkeit eines Problems L, zeigt man Folgendes:

- Das Problem L liegt in der Klasse **NP**.
- Man kann ein **NP**-vollständiges Problem L' auf das Problem L polynomiell reduzieren.

Zu einer polynomiellen Reduktion von L' auf L beweist man Folgendes: Jede Instanz $I_{L'}$ des Problems L' läßt sich als Instanz I_L des Problems L kodieren, so dass:

- Die Grösse von I_L ist polynomiell beschränkt in der Grösse von $I_{L'}$.
- Instanz I_L hat Antwort JA $\iff$ Instanz $I_{L'}$ hat Antwort JA.

Für jedes der beiden obigen Probleme ist eine Instanz gegeben durch einen Graphen G und eine Zahl k.

Beweise folgende Aussagen:

(a) INDEPENDENT SET ist **NP**-vollständig.

b) CLIQUE ist **NP**-vollständig.

Tipp zu a): Benutze eine geeignete Reduktion vom Problem VERTEX COVER, unter Ausnutzung von Komplementbildung auf Knotenmengen.

Tipp zu b): Benutze eine geeignete Reduktion vom Problem INDEPENDENT SET, unter Ausnutzung von Komplementbildung auf Kantenmengen.

(15+15 Punkte)