Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

SS 2004

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

Einführung in die Mathematische Optimierung
Übung 5 vom 13.05.2004

Abgabe bis zum 19.05.2004, 15:00 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Kreise und Lineare Abhängigkeit):

Die **Inzidenzmatrix** eines einfachen, ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine $|V| \times |E|$ Matrix $M = (m_{ve})$ mit

$$m_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{falls Knoten } v \text{ und Kante } e \text{ inzident sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die Spalten der Matrix M kann man als Vektoren in $\mathbb{Z}_2^{|V|}$ betrachten.

Zeige: Die Spalten der Inzidenzmatrix M sind genau dann linear abhängig über $\mathbb{Z}_2$, wenn der Graph G einen Kreis enthält.

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Kreisfreie Teilgraphen und Matroide):

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von E, so dass $A \in \mathcal{F}$, falls $A \subseteq E$ eine kreisfreie Kantenmenge ist. Zeige, dass $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid ist.

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Kardinalitätsmatching und Vertex Cover):

Betrachte den Graphen G in Abbildung 1.

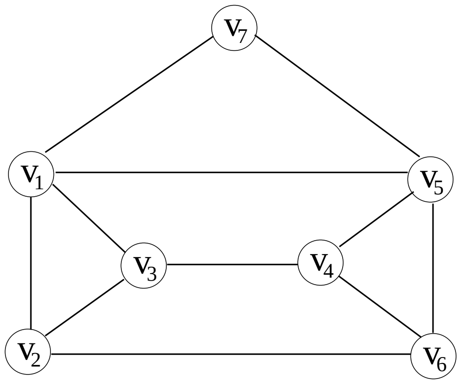

Abbildung 1: Graph G

(a) Gib eine optimale Lösung für das Kardinalitätsmatching-Problem. Begründe, warum diese Lösung optimal ist.

(b) Zeige, dass diese optimale Lösung und die optimale fraktionale Lösung für das Kardinalitätsmatching-Problem verschieden sind.

(c) Gib eine optimale Lösung für das Vertex-Cover-Problem. Begründe, warum diese Lösung optimal ist.

(d) Gib eine optimale fraktionale Lösung für das Vertex-Cover-Problem an. (Es reicht dazu, eine zulässige fraktionale Lösung zu finden, die denselben Wert wie eine fraktionale Lösung für das Kardinalitätsmatching-Problem hat.)

(6+9+6+9 Punkte)