Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

SS 2004

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

Einführung in die Mathematische Optimierung
Übung 3 vom 28.04.2004

(Abgabe bis zum 06.05.2004, 9:40 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes)

Aufgabe 1 (Kürzeste Wege und negative Kantengewichte):

Dijkstras Algorithmus funktioniert nur für Graphen mit nichtnegativen Kantengewichten. Der Algorithmus von Moore-Bellman-Ford löst den allgemeineren Fall, wobei ein gerichteter Graph mit konservativen Gewichten gegeben ist.

a) Betrachte den in Abbildung 1 angegebenen, gerichteten Graphen mit negativen Kantengewichten.

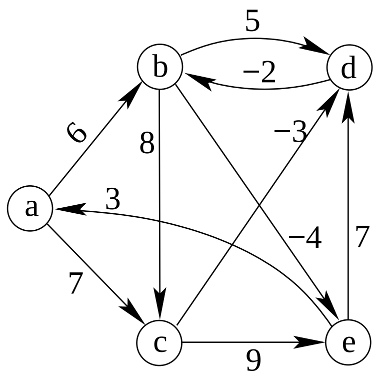

Abbildung 1: Ein gerichteter Graph mit negativen Kantengewichten

Bestimme mit dem Algorithmus von Moore-Bellman-Ford kürzeste Pfade von a zu allen anderen Knoten.

b) Wie kann man den Algorithmus von Moore-Bellman-Ford ergänzen, um bei der Existenz von negativen Kreisen die Meldung “keine Lösung” zu erhalten ? Begründe die Korrektheit dieser Ergänzung.

(10+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Tiefensuche und Online-Probleme):

Bei einem *Online-Problem* hat man nicht die vollständige Information über die Daten einer Probleminstanz, sondern nur unvollständige, lokale Informationen. Beispiele ergeben sich beim Zuweisen von Kunden auf Schalter oder beim Suchen in einem Labyrinth. Wir wollen hier das letztere Problem etwas durchleuchten, indem wir versuchen, in einem unbekannten Graphen mit einer unbekannten Zahl von n unbekannten Knoten von einem Startknoten S aus zu einem Zielknoten Z (dem "Ausgang") zu gelangen. Dabei kostet das Durchlaufen einer Kante (ein Schritt) jeweils eine Zeiteinheit. Unterwegs kann man die "Türen" an einem Knoten markieren[1].

a) Zeige, dass bei einer Tiefensuche keine Kante mehr als zweimal durchlaufen wird. Folgere, dass für insgesamt $n+1$ Knoten (einschließlich Startknoten) der Ausgang in höchstens $2n-1$ Schritten gefunden wird.

b) Argumentiere, dass $2n-1$ Schritte in gewissem Sinne optimal sind: Gib eine Familie von Graphen an, so dass für jeden gewählten Suchpfad einer der Knoten erst nach $2n-1$ Schritten erreicht wird.

c) Argumentiere, dass sich für keinen Graphen eine Garantie von n Schritten unterbieten lässt. Was müsste man finden, um für einen Graphen diesen Wert einhalten zu können?

(8+6+6 Punkte)

Aufgabe 3 (Wege und Zuverlässigkeit):

Gegeben sei ein Digraph G mit $s,t \in V(G)$. Jeder Kante $e \in E(G)$ wird eine Zahl $r(e) \in [0,1]$, ihre Zuverlässigkeit, zugewiesen. Die Zuverlässigkeit eines Weges ist das Produkt der Zuverlässigkeiten seiner Kanten. Gesucht ist der Weg von s nach t mit maximaler Zuverlässigkeit.

a) Zeige, dass man dieses Problem unter Anwendung von Logarithmus auf das Kürzeste-Wege-Problem reduzieren kann.

b) Löse dieses Problem in polynomialer Zeit ohne die Anwendung von Logarithmus.

(10+10 Punkte)

[1] Eine Methode ist beschrieben in Umberto Eco, "Der Name der Rose". Im Film wird aus dem Algorithmus ein Pullover.