Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

SS 2004

Einführung in die Mathematische Optimierung
Übung 2 vom 21.04.2004

(Abgabe bis zum 28.04.2004, 9:45 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes)

Aufgabe 1 (Kürzeste Wege):
Betrachte den folgenden gewichteten Graphen:

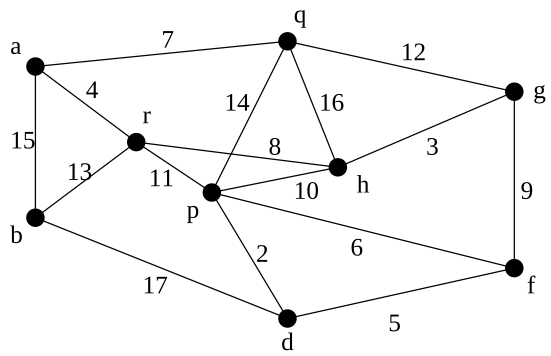

Abbildung 1: Ein gewichteter Graph

(a) Führe eine Breitensuche zur Bestimmung der kürzesten *ungewichteten* Wege von a durch und gib den resultierenden Baum an. (Gleichzeitig hinzukommende Knoten sollen dabei in alphabetischer Reihenfolge in die Warteschlange einsortiert werden.)

(b) Führe eine Tiefensuche von a im Graphen durch und gib den resultierenden Baum an. (Wiederum sollen mögliche Entscheidungen aufgrund alphabetischer Ordnung getroffen werden.)

(c) Bestimme einen Kürzeste-Wege-Baum im gewichteten Graphen mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra. (Gib dabei in geeigneter Form die wesentlichen Zwischenschritte an. Wie viele derartige Zwischenschritte werden vorgenommen?)

(6+6+12 Punkte)

Aufgabe 2 (Breitensuche):
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Breitensuche aus einem Startknoten $q \in V$ wird mit Hilfe der Warteschlange W durchgeführt.

Zeige, dass in der Warteschlange W zu jedem Zeitpunkt der Abstand zu q monoton wächst und sich zwischen aufeinanderfolgenden Knoten um höchstens 1 unterscheidet.

(16 Punkte)

Aufgabe 3 (Das Orakel von Kevin Bacon):
Dem *Orakel von Kevin Bacon* liegt der Schauspielergraph S zugrunde: Schauspieler sind durch Knoten repräsentiert. Zwei Schauspielerknoten sind durch eine Kante verbunden, wenn sie gemeinsam in einem Film gespielt haben. Der Knoten von Kevin Bacon hat den Wert 0; die *Kevin-Bacon-Zahl* (KBZ) eines anderen Schauspielers ist die Länge eines kürzesten Weges im Schauspielgraphen S. (So hat etwa Tom Hanks die Kevin-Bacon-Zahl 1, da er mit ihm gemeinsam in der Raumkapsel *Apollo 13* gesessen hat.)

Das Orakel ist im Web verfügbar: `http://www.cs.virginia.edu/oracle/`. Interessant sind dabei auch die verschiedenen Hilf- und Infoseiten. Die zugrundeliegenden Filmdaten sind der *Internet Movie Database* entnommen: `http://www.imdb.com/`

Jetzt die Fragen:

a) Beschreibe eine Strategie, mit der man auf jeden Fall einen Schauspieler möglichst hoher KBZ im Graphen S finden kann, auch wenn man noch nie etwas von Hollywood gehört oder gesehen hat. Welcher Graphenalgorithmus steckt dahinter?

b) Finde einen Knoten mit mindestens KBZ 4. (Früher wurde man mit mindestens KBZ 7 in die "Hall of Fame" aufgenommen; das ist Übungsteilnehmern bisher immer gelungen; leider werden dort keine Einträge mehr vorgenommen.)

c) Will man das Orakel nicht nur als "Black Box" befragen, sondern dafür sorgen, dass es schnell Antworten geben kann, benötigt man andere algorithmische Methoden. Man unterscheidet dabei zwischen *Preprocessing* ("Vorarbeit") und *Queries* ("Anfragen").

   Welche Datenstruktur würden Sie berechnen, um Anfragen schnell zu beantworten? (Dazu gehört auch die Angabe eines gültigen Pfades mit Filmen!) Wie groß ist diese Datenstruktur, wenn jeder der $n = 500.000$ Schauspieler und jeder Filmname 32 Byte benötigt?

   Wie lange dauert das Preprocessing in Abhängigkeit von n, wie lange dauert die Beanwortung einer Anfrage?

d) Das Orakel bietet auch an, Abstände zwischen beliebigen Knoten in S zu berechnen. Beschreiben Sie zwei mögliche Lösungswege, einen ohne, einen mit Preprocessing. Wenn man zusätzlich berücksichtigt, dass der tatsächlich zur Verfügung stehende Speicherplatz begrenzt ist: Wie kann man vorgehen, um nicht immer, aber "sehr oft" auf vorher berechnete Daten zurückgreifen zu können, so dass schnelle Antwortzeiten möglich sind?

(20 Punkte)