Technische Universität Braunschweig
Fachbereich 1 – Mathematik
Prof. Dr. S. Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

Sommersemester 2004

Abschlussklausur
“Einführung in die Mathematische Optimierung”
24.07.2004

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

Mit dem Aushang des Klausurergebnisses nur mit der Matrikelnummer
*- neben Raum **F 524***
- im Internet
(ggf. streichen!) bin ich einverstanden:

.... *(Unterschrift)*
Ohne Unterschrift kein Aushang!

Die Klausur ist mit 50 von 100 Punkten bestanden.
Alle Antworten zu den Aufgaben 1-4 müssen begründet werden, in Aufgabe 5, soweit dies verlangt ist. Dabei dürfen Ergebnisse aus der Vorlesung und von den Übungsblättern (mit genauer Quellenangabe) benutzt werden.
Alle Blätter sind mit *Namen* zu versehen. Abzugeben sind die Lösungen in *Reinschrift* mit allen *Nebenrechnungen*, sowie diesem Blatt als Deckblatt. Mit *Bleistift* oder *in rot* geschriebene Klausurteile können nicht gewertet werden.
Bitte vor der Abgabe die Blätter nach Aufgaben sortieren und bearbeitete Aufgaben unten ankreuzen!
Die Bearbeitungszeit für die Klausur ist 180 Minuten.
Erlaubte Hilfsmittel sind schriftliche Unterlagen wie Skripten, Übungsblätter und Musterlösungen, persönliche Aufzeichnungen. Nicht erlaubt sind Bücher und Taschenrechner aller Art.

Aufgabe	**Bearbeitet**	**Punkte**	**von**
1			**20**
2			**20**
3			**20**
4			**20**
5			**20**
Summe			**100**

1. Aufgabe: **10+10 Punkte**

Betrachte den in Abbildung 1 angegebenen, gewichteten Graphen.

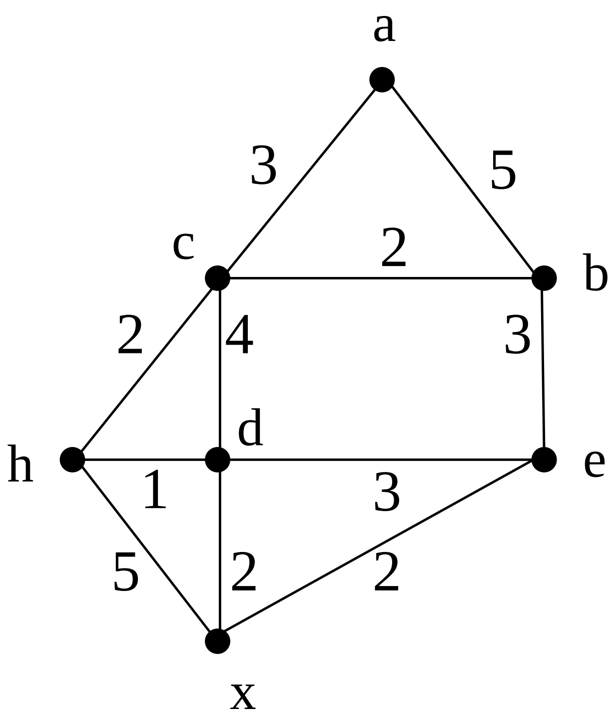

Abbildung 1: Ein gewichteter Graph

(a) Bestimme mit dem Algorithmus von Dijkstra kürzeste Pfade von a zu allen anderen Knoten. (Gib dabei in geeigneter Form die wesentlichen Zwischenschritte an. Wie viele derartige Zwischenschritte werden vorgenommen?)

(b) Bestimme ein kürzestes zusammenhängendes Netzwerk, das alle Knoten verbindet. Verwende dabei den Algorithmus von Kruskal beginnend mit dem Knoten a.

2. Aufgabe: **10+10 Punkte**

Gegeben sei folgendes lineare Programm (P):

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\text{min} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 30 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 \\
 & & & & & x_i & \geq & 0, \quad i = 1, \ldots, 3.
\end{array}$$

(a) Formuliere das duale Problem (D) zu (P). Löse (D) mit der Simplexmethode. Benutze dabei folgende Pivotregel: als Pivotspalte wird jeweils die mit dem kleinsten negativen Kostenkoeffizienten gewählt.

(b) Löse (P) mit dem Satz vom komplementären Schlupf.

3. Aufgabe: **10+10 Punkte**

Betrachte die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 4x_2^4 + x_1^2 x_2^2$.

(a) Wende das Verfahren des steilsten Abstiegs mit optimaler Schrittweitenwahl mit dem Startpunkt $(1, 1)$ an und führe eine Iteration durch.

(b) Betrachte nun die Restriktionen

$$\begin{array}{rcrrrl} g_1(x_1, x_2) & := & -x_1 & +x_2 & -2 & \leq 0 \\ g_1(x_1, x_2) & := & 3x_1 & +x_2 & -12 & \leq 0. \end{array}$$

Bestimme, ob es einen zulässigen Punkt gibt, in dem nur die Restriktion g_1 aktiv ist und die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt sind. Liegt darin ein globales Optimum vor ?

4. Aufgabe: **5+5+5+5 Punkte**

Betrachten Sie den Graphen in Abbildung 2. Für jede Kante $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$ sind die Kantenkosten $c_{ij} = i \times j$.

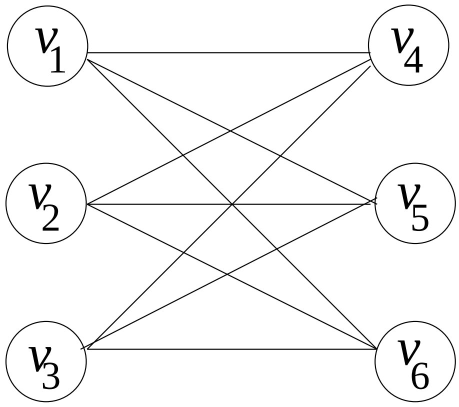

Abbildung 2: Graph G

(a) Wie viele perfekte Matchings gibt es in G? Finden Sie (durch Hinsehen) eines mit möglichst geringen Kosten!

(b) Geben Sie ein *ganzzahliges* lineares Optimierungsproblem an, das als Lösung ein perfektes Matching minimaler Kosten hat.

(c) Geben Sie das duale Problem zum zugehörigen linearen Optimierungsproblem an und interpretieren Sie es.

(d) Geben Sie eine möglichst gute Lösung für das duale Problem an.

(e) Begründen Sie, warum aus Gleichheit der Kosten in (a) und (d) die Optimalität der Lösung in (a) folgt.

5. Aufgabe: **20 Punkte**

(a) Wahr oder falsch: Die Anzahl positiver x_j in einer zulässigen Basislösung eines LPs $\min c^T x$ mit $Ax = b, x \geq 0$, überschreitet nicht den Rang der Matrix A. (Kurze Begründung!)

(b) Wahr oder falsch: Zu jedem LP in n unbeschränkten Variablen gibt es ein äquivalentes LP in $2n$ nichtnegativen Variablen. (Kurze Begründung!)

(c) Wahr oder falsch: Die beiden LPs $\max c^T x$ mit $Ax \leq b$ und $\max -c^T x$ mit $Ax \leq b$, können beide zulässige Lösungen mit beliebig grossem Zielfunktionswert haben. (Kurze Begründung!)

(d) Wahr oder falsch: Die beiden LPs $\max c^T x$ mit $Ax \leq b, x \geq 0$ und $\min b^T y$ mit $A^T y \geq b, x \geq 0$ können beide zulässige Lösungen mit beliebig grossem Zielfunktionswert haben. (Kurze Begründung!)

(e) Wahr oder falsch: Das Finden eines kostengünstigsten zusammenhängenden Netzwerkes in einem Graphen ist ein NP-schweres Problem, wenn man negative Kantenkosten zulässt. (Kurze Begründung!)

(f) Was ist ein Greedy-Algorithmus? Wo wendet man ihn an? Nennen Sie ein Problem, bei dem ein Greedy-Algorithmus i.a. *keine* Optimallösung liefert.

(i) Beschreiben Sie in einfachen Worten, was ein NP-vollständiges Problem ist.

(h) Geben Sie eine Funktion an, die konvex ist, aber kein eindeutiges globales Minimum hat.

(i) Wahr oder falsch: Die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist konvex. (Kurze Begründung!)

(j) Die Unternehmensberatung BigMcConsulting benötigt ein Programm zum Lösen von Rundreiseproblemen. Geben Sie eine Stellungnahme ab: Wo liegen die Schwierigkeiten? Was wären Sie persönlich in der Lage zu liefern? Wie viele Arbeitsstunden müsste man Ihnen dafür bezahlen?