Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

WS 2002/03

Prof. Dr. Sándor Fekete
Laura Heinrich-Litan

Lineare Optimierung
Klausur zum 14.02.03

Aufgabe 1 (Simplexmethode und Komplementärer Schlupf):

Gegeben sei folgendes lineare Programm.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\min & 2x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & \geq & 4 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & \geq & 3 \\
 & & & & & & & & & x_i & \geq & 0, \quad i = 1, \ldots, 5.
\end{array}$$

(a) Löse das duale Problem mit der Simplexmethode.

(c) Löse das primale mit dem Satz vom komplementären Schlupf.

(d) Löse das primale Problem mit der revidierten Simplexmethode.

(10+5+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Konvexkombinationen):

(a) Betrachte die Menge $P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$. Zeige: $P(A, b)$ ist konvex, d.h. mit $x^1, \ldots, x^k \in P(A, b)$ ist für $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ mit $\sum_{i=1}^k = 1$, $\lambda_i \geq 0$ auch $y \in P(A, b)$.

(b) Zeige mit Hilfe von (a): Der in Abbildung 1 gezeigte fraktionale Vektor y gehört zum Matching-Polytop

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{e \in \delta(v)} x_e & = & 1 & \text{für} \quad v \in V \\
\sum_{e \in \delta(S)} x_e & \geq & 1 & \text{für} \quad S \subset V, S \neq \emptyset, |S| \text{ ungerade} \\
x & \geq & 0. &
\end{array}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3 :

Sei $A = A^T$. Zeige, dass jede zulässige Lösung von min $c^T x$ unter $Ax = c$ optimal ist.

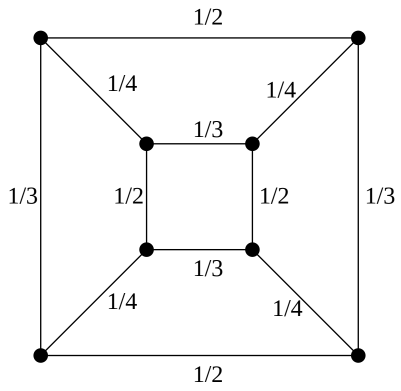

Abbildung 1: Ein Vektor y

(5 Punkte)

Aufgabe 4 (Duale Simplexmethode und Gomory-Schnittebenen):

Betrachte das ganzzahlige Programm

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & & & \\
\text{unter} & -3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 4 & & \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 11 & & \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 5 & & \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & \\
 & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}\,. & &
\end{array}
$$

Zeichne ein Bild, um die ersten zwei Fragen zu beantworten:

(a) Was ist der Optimalwert der linearen Relaxation ? Was ist der Optimalwert des ganzzahligen Problems ?

(b) Was ist die konvexe Hülle aller zulässigen Lösungen des ganzzahligen Problems ?

(c) Anbei das optimale Simplextableau. Gib eine Gomory-Schnittebene an. Füge diese neue Restriktion zu dem oben angegeben LP hinzu und löse das neue lineare Programm mit der dualen Simplexmethode.

(5+5+5 Punkte)

Aufgabe 5 :

(a) Gib zwei Gründe an, warum die Simplexmethode besser ist als gnadenloses Ausprobieren aller Basislösungen.

(b) Welche Bedeutung hat das Farkas-Lemma für die Komplexität von "Linearer Optimierung"?

(c) Zu welcher Komplexitätsklasse gehört "Lineare Optimierung"? Gib zwei Algorithmentypen an, die dies belegen!

(d) Was weiß man über die Laufzeit der Simplexmethode für die meisten Pivotauswahlregeln? Wie nennt man die Beispiele, die das belegen?

(e) Sei (P) ein lineares Optimierungsproblem mit beschränkter Optimallösung. Was weiss man dann über Zulässigkeit und Optimalwert des dualen Problems (D)?

(f) Stimmt es, dass in einem Paar zueinander dualer LPs wenigstens eines eine zulässige Lösung besitzt? (Gib ein Stichwort zur Begründung Deiner Antwort!)

(g) Dem neuen Vorstandsvorsitzenden der Deutsche Bahn AG hat ein Unternehmensberater erzählt, dass es effiziente Algorithmen zum Lösen von LPs gibt, mit denen sich schneller neue Fahrpläne berechnen ließen. Deshalb will er, dass Du eine Task Force leitest, die das mit der Ellipsoidmethode angehen soll. Nenne einen Vorteil und einen Nachteil dieser Methode und sprich eine Empfehlung für die weitere Vorgehensweise aus!

(h) Welche Bedeutung haben die Ungleichungen $\sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 2 \quad \text{für} \quad S \subset V, S \neq \emptyset$ in dem in der Vorlesung vorgestellten LP für TSP ?

(i) Was beschreibt das LP

$$\begin{array}{rcll} \min & w^t x & & \\ \displaystyle\sum_{e\in\delta(v)} x_e & = & 1 & \text{für} \quad v \in V \\ \displaystyle\sum_{e\in\delta(S)} x_e & \geq & 1 & \text{für} \quad S \subset V, S \neq \emptyset, |S| \text{ ungerade} \\ x & \geq & 0? & \end{array}$$

Für welche Graphen ist dieses LP zulässig? Gib eine möglichst große Klasse von Graphen $G = (V, E)$ an, für die das LP eine ganzzahlige Lösung hat.

(j) Erkläre mit eigenen Worten, was ein NP-vollständiges Problem ist.

(20 Punkte)