Technische Universität Braunschweig
Fachbereich 1 – Mathematik
Prof. Dr. S. Fekete

Sommersemester 2002

Abschlussklausur "Einführung in die Optimierung" 06.07.2002

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

*Mit dem Aushang des Klausurergebnisses nur mit der Matrikelnummer am Raum **F 524** bin ich einverstanden.*

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.
ALLE ANTWORTEN MÜSSEN BEGRÜNDET WERDEN.
Dabei dürfen Ergebnisse aus der Vorlesung und von den Übungsblättern (mit genauer Quellenangabe) benutzt werden.
Alle Blätter sind mit *Namen* zu versehen. Abzugeben sind die Lösungen in *Reinschrift* mit allen *Nebenrechnungen* auf DIN A4-Blättern, sowie diesem Blatt als Deckblatt. Bitte jeweils ein neues Blatt für eine neue Aufgabe.
Mit *Bleistift* oder *in rot* geschriebene Klausurteile können nicht gewertet werden.
Die Bearbeitungszeit für die Klausur ist 180 Minuten.
Erlaubte Hilfsmittel sind schriftliche Unterlagen wie Skripten, Übungsblätter und Musterlösungen, persönliche Aufzeichnungen und einfache Taschenrechner. Nicht erlaubt sind Bücher und programmierbare Taschenrechner.

Aufgabe	**Bearbeitet**	**Punkte**	**von**
1			**20**
2			**10**
3			**10**
4			**10**
5			**10**
Summe			**60**

1. Aufgabe: **2+3+3+3+5+3+1 Punkte**

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 10x - 6y + 34.$$

(a) Zeigen Sie: f ist konvex.

(b) Suchen Sie eine Nullstelle von f, indem Sie mit dem Startpunkt $(0, 0)$ eine Iteration des Newton-Verfahrens durchführen. Was lässt sich über den Punkt nach der Iteration sagen? Haben Sie eine Erklärung?

(c) Begründen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ ein Minimum besitzt und bestimmen Sie dieses.

(d) Betrachten Sie nun die Restriktionen

$$\begin{array}{lcrcrrcl} g_1(x,y) & := & -x & & & & \leq & 0, \\ g_2(x,y) & := & & - & y & & \leq & 0, \\ g_3(x,y) & := & -x & + & y & -2 & \leq & 0, \\ g_4(x,y) & := & 3x & + & y & -12 & \leq & 0. \end{array}$$

Zeichnen Sie den zulässigen Bereich, und geben Sie sämtliche Kombinationen von aktiven Restriktionen an, für die es zulässige Punkte gibt.

(Für die folgenden Teilaufgaben kann es unter Umständen hilfreich sein, wenn Sie in dieser Zeichnung auch das Minimum aus (c) und Höhenlinien von f markieren. Dies ist aber nicht verlangt!)

(e) Bestimmen Sie für jede der vier Restriktionen g_i, $i = 1, \ldots, 4$, ob es einen zulässigen Punkt gibt, in dem nur diese Restriktion aktiv ist und die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt sind.

(f) Zeichnen Sie nun erneut den zulässigen Bereich aus (d). Testen Sie geometrisch für jeden zulässigen (!) Punkt, an dem mehr als eine Restriktion gültig ist, ob die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt sein können. (Zeichnen Sie für jeden der Punkte den Gradienten ein. Wenn die Kuhn-Tucker-Bedingung *nicht* erfüllt ist, zeichnen Sie eine zulässige Richtung ein, in der der Funktionswert kleiner wird.)

(g) Geben Sie zusammenfassend das Minimum von f mit den vier Restriktionen an.

2. Aufgabe: **3+2+5 Punkte**

Betrachten Sie das Lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
\textit{mit} & x_1 & - & x_2 & \leq & 1, \\
& x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6. \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

(a) Zeichnen Sie den zulässigen Bereich. Lösen Sie das Problem geometrisch und zeigen Sie wiederum geometrisch, dass im Optimum die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt sind.

(b) Bringen Sie das Problem auf Standardform. Geben Sie eine zulässige Startbasis an, zu der keine der beiden Variablen x_1 und x_2 gehört.

(c) Lösen Sie das Problem mit dem Simplex-Verfahren.

3. Aufgabe: **5+5 Punkte**

Betrachten Sie die folgenden Simplex-Tableaus, die jeweils zu Minimierungsproblemen in Standardform gehören. Analysieren Sie die Tableaus: Falls möglich, geben Sie jeweils den aktuellen Funktionswert, die zugehörige Basis und die zugehörige Basislösung an. Lesen Sie weiter ab, ob die Lösung optimal ist oder weiter verbessert werden kann. Wenn es eine Verbesserungsmöglichkeit gibt, führen Sie einen Simplexschritt durch! Falls es irgendwelche Schwierigkeiten gibt, kommentieren Sie diese.

(a)

x_1	x_2	x_3	x_4	z
1/4	1	1/4	0	2
-9/4	0	-3/4	1	3
-5/4	0	3/4	0	-6

(b)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
-22/3	11/3	0	1	0	-4/3	13/3
-4/3	8/3	0	0	1	-1/3	22/3
7/3	1/3	1	0	0	1/3	5/3
23/3	-4/3	0	0	0	5/3	-25/3

(c)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	-4/7	-5	1	0	-1/7	40/7
0	-30/7	3	0	1	-4/7	48/7
1	4/7	0	0	0	1/7	9/7
0	33/7	0	0	0	4/7	36/7

(d)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
3/4	1	2	-1/4	0	3
17/4	0	9	-3/4	1	24
13/4	0	10	-7/4	0	21

(e)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
22	12	2	-1	0	5
7	0	9	5	2	-4
8	1	10	-4	0	21

4. Aufgabe: **5+5 Punkte**

(a) Betrachten Sie den Graphen in Abbildung 1. Bestimmen Sie ein kürzestes zusammenhängendes Netzwerk, das alle Knoten verbindet.

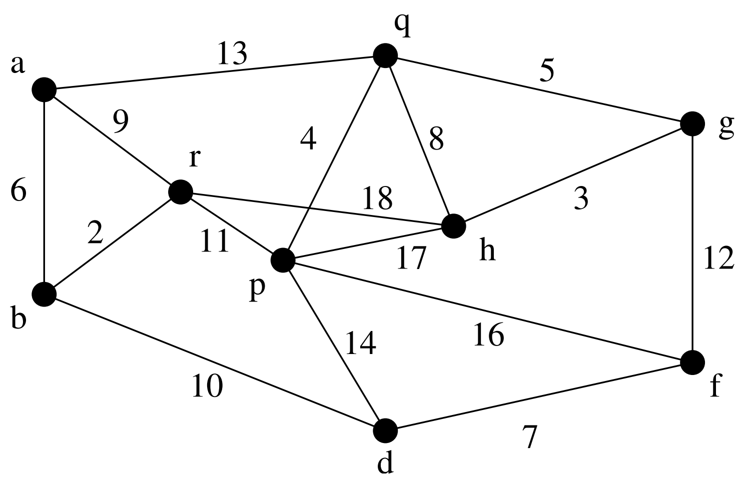

Abbildung 1: Ein gewichteter Graph

(b) Betrachten Sie den Graphen in Abbildung 2. Bestimmen Sie ein kürzestes zusammenhängendes Netzwerk, das alle Knoten verbindet.

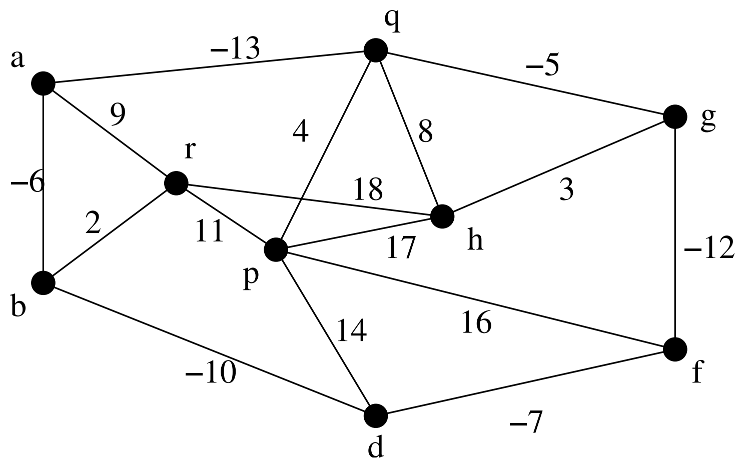

Abbildung 2: Noch ein gewichteter Graph

5. Aufgabe: **3+7 Punkte**

Betrachten Sie den Graphen in Abbildung 3.

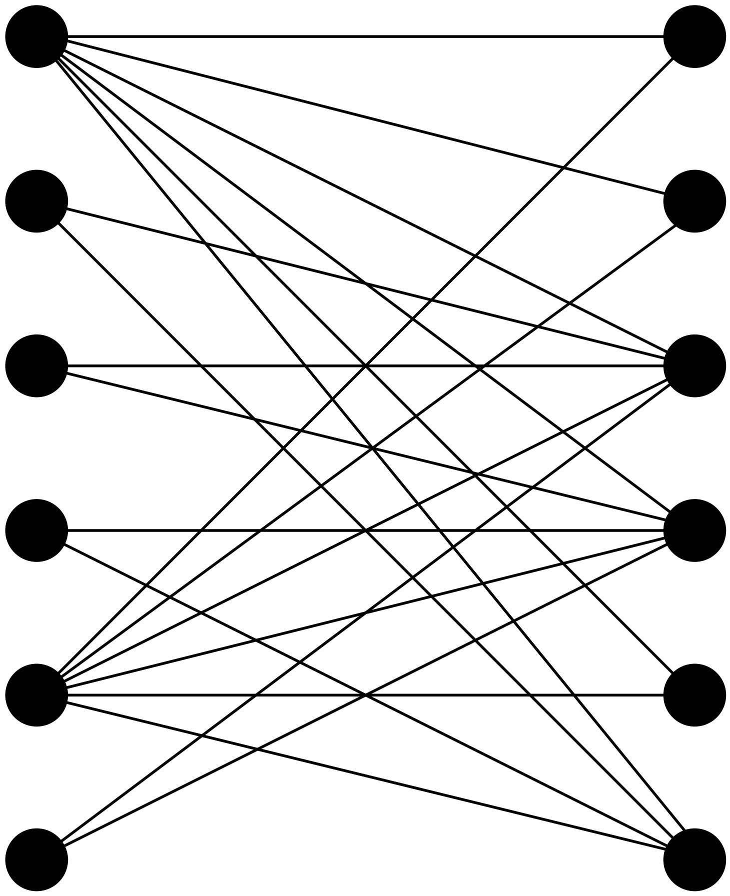

Abbildung 3: Noch ein Graph

(a) Bestimmen Sie ein Matching mit möglichst vielen Kanten. (Entweder durch geschicktes Hinsehen oder durch einen geeigneten Algorithmus.)

(b) Versuchen Sie, eine möglichst gute und möglichst einfache Schranke für die Größe eines Matchings anzugeben. (Begründen Sie die Gültigkeit der Schranke noch einmal "von Hand"!)