Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Andreas Szostak

SS 2002

Einführung in die Optimierung
Übung 10 vom 26.06.02

Abgabe der Aufgaben durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock der Mathematik bis 13:00 am 03.06.02.

Aufgabe 1 (Kürzeste Wege):
Betrachten Sie den folgenden gewichteten Graphen:

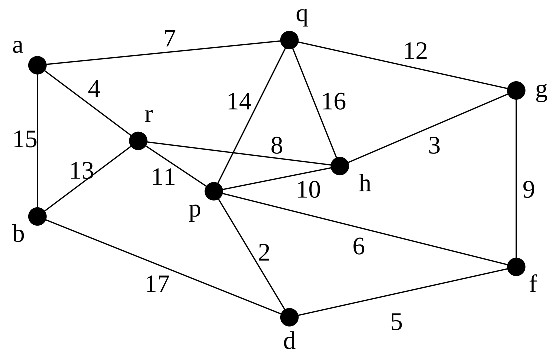


Abbildung 1: Ein gewichteter Graph

(a) Bestimmen Sie einen Kürzeste-Wege-Baum mit Startknoten a im gewichteten Graphen mit Hilfe des Algorithmus von Bellman-Ford. (Geben Sie dabei in geeigneter Form die wesentlichen Zwischenschritte an. Wie viele derartige Zwischenschritte werden vorgenommen?)

(b) Bestimmen Sie einen Kürzeste-Wege-Baum mit Startknoten a im gewichteten Graphen mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra. (Geben Sie dabei in geeigneter Form die wesentlichen Zwischenschritte an. Wie viele derartige Zwischenschritte werden vorgenommen?)

Oftmals ist man nur an der minimalen Anzahl der Kanten auf dem Weg zwischen zwei Knoten in einem Graphen interessiert. Dieses Problem ist eng verwandt mit der Suche nach kürzesten Wegen: Setzt man das Gewicht jeder Kante gleich Eins, so liefert etwa der Dijkstra-Algorithmus einen Baum, der ausgehend von einem Anfangsknoten die in diesem Sinne kürzesten Pfade zu allen Knoten des Graphen enthält. Da man aber identische Kantengewichte hat und nur Kanten zählen muss, kann man einen Algorithmus mit wesentlich besserer Laufzeit erwarten. Ein Algorithmus, der diese Anforderung erfüllt, ist die *Breitensuche* ("Breadth-First Search", BFS). Dieser Algorithmus ist wiederum ein Spezialfall des "Graph Scanning Algorithm", mit dem der Zusammenhang eines Graphen überprüft werden kann:

Graph Scanning Algorithm

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, $s \in V$

Ausgabe: Menge $R \subseteq V$ der von s erreichbaren Knoten und Menge $T \subseteq E$ mit (R, T) ist maximaler Baum

(1) $R := \{s\}$, $Q := \{s\}$, $T := \emptyset$.

(2) IF $Q = \emptyset$ THEN STOP
ELSE wähle $v \in Q$

(3) IF $\exists u \in V \setminus R:\ e := \{v, u\} \in E$
THEN $R := R \cup \{u\}$, $Q := Q \cup \{u\}$, $T := T \cup \{e\}$
ELSE $Q := Q \setminus \{v\}$

(4) GOTO (2)

Je nach Wahl des Elements v in Schritt (2) unterscheidet man die *Breitensuche* (es wird das erste Element in Q ausgewählt: “first-in-first-out”) und die *Tiefensuche* (”Depth-First Search”, DFS; es wird das zuletzt hinzugefügte Element ausgewählt: “last-in-first-out”).

(c) Führen Sie eine Breitensuche zur Bestimmung der kürzesten *ungewichteten* Wege von a durch. (Gleichzeitig hinzukommende Knoten sollen dabei in alphabetischer Reihenfolge in die Warteschlange Q einsortiert werden.)

(d) Führen Sie eine Tiefensuche von a im Graphen durch und geben Sie den resultierenden Baum an. (Wiederum sollen mögliche Entscheidungen aufgrund alphabetischer Ordnung getroffen werden.)

(30 Punkte)

Aufgabe 2 (Kürzeste einfache Wege bei negativen Kanten):

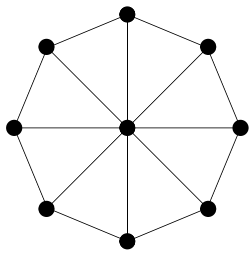
Ein *einfacher* Weg in einem Graphen ist einer, bei dem kein Knoten mehrfach besucht wird.

Zeigen Sie: Sei A ein Algorithmus, der für jeden beliebigen Graphen G mit (möglicherweise negativen) Kantengewichten w_e und zwei Knoten u und v einen kürzesten einfachen Weg zwischen u und v findet. Dann kann man mit A in jedem beliebigen Graphen G' mit Kantengewichten w'_e eine kürzeste Rundreise durch alle Knoten finden.

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (MST und Kürzeste-Wege im regelmäßigen n-Eck):

Gegeben sei ein Graph G mit $n \geq 4$ Knoten und $m = 2n - 2$ Kanten mit folgender Anordnung: Ein Knoten ($v = 1$) befindet sich im Mittelpunkt eines Kreises mit Radius $r > 0$ und die übrigen $n-1$ Knoten sind regelmäßig auf dem Kreisrand verteilt. Das ergibt ein regelmäßiges $(n-1)$-Eck mit Mittelpunkt. Die Kanten seien die Verbindungen vom Mittelknoten zu allen Randknoten und zwischen den benachbarten Randknoten. (rechts: Beispiel für $n = 9$)



Die Kantengewichte seien die euklidischen Abstände zwischen den Knoten.

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von n einen aufspannenden Baum minimalen Gewichts. Welche Fälle treten auf? Für welche n ist die Lösung (bis auf Rotationssymmetrie) eindeutig?

(b) Bestimmen Sie (wiederum in Abhängigkeit von n) einen Kürzeste-Wege-Baum. Betrachten Sie dazu als Startknoten einmal den Mittelknoten und einmal einen Randknoten. Wie lassen sich diese Fälle klassifizieren? Wie sieht es hier mit der Eindeutigkeit aus? Skizzieren Sie die Lösung für $n = 13$ und einen Randknoten als Startknoten.

(15 Punkte)