Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Andreas Szostak

SS 2002

Einführung in die Optimierung
Übung 9 vom 19.06.02

Abgabe der Aufgaben durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock der Mathematik bis 13:00 am 19.06.02.
Termin für die Preisaufgabe: 26.06.02, 13:00.

Aufgabe 1 (Spieltheorie und Dualität):
Spieltheorie ist ein wissenschaftlicher Bereich der Ökonomie, der sehr eng mit Optimierung und insbesondere Linearer Optimierung verknüpft ist. Dabei geht es darum, wie sich aus dem Zusammenwirken verschiedener Teilnehmer Gewinne oder Verluste ergeben und welche Strategien dabei besonders erfolgreich sind. Gerade im ökonomischen Zusammenhang ist das natürlich ein brandaktuelles Thema, für das bereits mehrere Nobelpreise vergeben wurden.

Betrachten wir das Spiel, in dem Spieler X eine von n Möglichkeiten auswählt, während Spieler Y eine von m Möglichkeiten wählt. Wählt X Möglichkeit i und Y Möglichkeit j, so erhält X von Y den Betrag a_{ij}. (Entsprechend bezeichnet man die Matrix $A = (a_{ij})$ als *Gewinnmatrix.*)

Wird dieser Vorgang viele Male wiederholt, so ist es für einen Spieler schlecht, immer nur dieselbe Wahl zu treffen, da der andere Spieler sich darauf einstellen und die eigene Wahl anpassen kann. Daher empfiehlt es sich, ein Zufallselement in die Züge einzubauen: Eine "gemischte Strategie" für X besteht aus einem Vektor $x^t = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, wobei Zug i mit Wahrscheinlichkeit x_i gewählt wird. Entsprechend wählt Y eine gemischte Strategie $y^t = (y_1, \dots, y_m)$ mit $y_j \geq 0$ und $\sum_{i=1}^m y_j = 1$. Der Erwartungswert für den Gewinn von X ist dann $E(x, y) = x^t A y$.

(a) Angenommen, X wählt x als die Lösung des LPs

$$\begin{array}{lcccl}
\max & & & u & & \\
mit & \sum_{i=1}^n x_i & & & = & 1 \\
\forall j: & \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} & - & u & \geq & 0 \\
& x_i & & & \geq & 0.
\end{array}$$

Zeigen Sie, dass X mindestens einen Gewinn des zugehörigen u sicher hat, egal welches y Spieler Y wählt.

(b) Zeigen Sie, dass das duale Problem zum Problem aus (a)

$$\begin{array}{lcccl}
\min & & & v & & \\
mit & \sum_{i=1}^m y_i & & & = & 1 \\
\forall i: & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_j & - & v & \leq & 0 \\
& y_j & & & \geq & 0.
\end{array}$$

ist und interpretieren Sie dieses Problem aus der Sicht von Y.

(c) Begründen Sie, dass beide Probleme denselben Optimalwert haben. (Das Ergebnis nennt man auch den "Wert" des Spiels.)

(d) Betrachten Sie ein einfaches Spiel mit zwei Möglichkeiten: Jeder Spieler nimmt verdeckt eine Münze in die linke oder die rechte Hand. Wenn beim Öffnen die Hände übereinstimmen, gewinnt X einen Euro von Y. Wenn sie nicht übereinstimmen, gewinnt Y einen Euro von X. Finden Sie den Wert des Spiels und ein Paar optimaler gemischter Strategien.

(e) Betrachten Sie ein Spiel mit jeweils drei Möglichkeiten: Jeder Spieler wählt eine der Zahlen 1, 2, 3. Der Spieler mit der höheren Zahl gewinnt einen Euro, außer wenn die höhere Zahl genau eins größer ist als die andere Zahl; in dem Falle verliert die höhere Zahl drei Euro. Wenn die Zahlen übereinstimmen, gibt es keine Auszahlung. Den Wert des Spieles kann man leicht raten (sollte man aber trotzdem begründen); aber wie sieht eine optimale Strategie für X oder Y aus?

(40 Punkte)

Aufgabe 2 (Optimale Netzwerke):

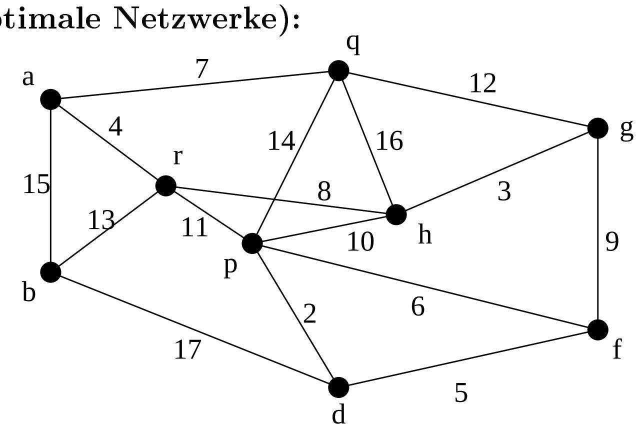

Abbildung 1: Ein gewichteter Graph

(a) Bestimmen Sie einen aufspannenden Baum T_m minimalen Gewichts für den Graphen in Abbildung 1.

(b) Angenommen, G ist ein Graph, bei dem auch negative Kantengewichte vorkommen. Beschreiben Sie einen Algorithmus, mit dem man einen zusammenhängenden Graphen minimalen Gesamtgewichts finden kann. (Begründen Sie auch, warum der Algorithmus ein korrektes Ergebnis liefert!)

(20 Punkte)

Preisaufgabe: Kürzeste Rundreise

Abbildung 2 zeigt die schon bekannten zehn Städte im Mittleren Westen der USA. Die Entfernungsmatrix ist ebenfalls unverändert.

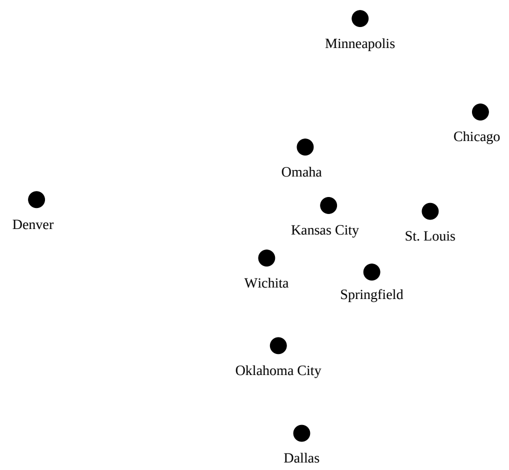

Abbildung 2: Zehn Städte im Mittleren Westen

		2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Chicago	92	99	50	41	79	46	29	50	70
2	Dallas		78	49	94	21	64	63	42	37
3	Denver			60	84	61	54	86	76	51
4	Kansas City				45	35	20	26	17	20
5	Minneapolis					80	36	55	59	64
6	Oklahoma City						46	50	29	16
7	Omaha							45	37	30
8	St. Louis								21	45
9	Springfield									25
10	Wichita									

Gesucht wird nun eine möglichst kurze Rundreise, die in Chicago beginnt, alle anderen Städte besucht und dann wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

(a) Bestimmen Sie eine möglichst gute Lösung.

(b) Beweisen (!) Sie eine möglichst gute untere Schranke für die Länge einer Lösung. (Die Argumentation sollte sich auf wenigen Seiten führen lassen, vor allem aber ohne stures Ausprobieren auskommen!)

Wenn Sie eine Lösung der Länge L und eine Schranke der Länge S bekommen, dann ist Ihre Punktzahl

(30 $\frac{S}{L}$ Punkte)

Wichtig ist dabei vor allem, dass die mathematische Argumentation für Ihre untere Schranke wasserdicht ist. (Jedi-Suggestivtricks mit "Die Lösung ist gut!!" funktionieren auf diesem Planeten nicht. Schließlich lasse ich mich ja auch nicht einfach zum Überdenken meines Lebens nach Hause schicken...)

Für die beste Punktzahl gibt es zwei Kinokarten für das Cinemaxx in Braunschweig. (Ich behalte mir vor, die Lösung mündlich erläutern zu lassen.) Bei identischer Punktzahl entscheidet die Reihenfolge des Eingangs; wenn man meint, eine gute Lösung zu haben, empfiehlt sich daher, eine Email mit einer Beweisskizze an mich (s.fekete@tu-bs.de) zu schicken. Auch ein "Zeitstempel" von Andreas reicht im Zweifelsfalle.