Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Andreas Szostak

SS 2002

Einführung in die Optimierung
Übung 5 vom 15.05.02

Abgabe der Aufgaben durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock der Mathematik bis 13:00 am 29.05.02.

Aufgabe 1 (Oberflächenoptimierung):
(a) Betrachten Sie das Problem

$$\begin{array}{ll} \max & x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\ \textit{mit} & x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{array}$$

Stellen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung auf und lösen Sie das resultierende System. Kann man daraus bereits schließen, dass ein globales Maximum vorliegt? Falls nein, fügen Sie eine Zusatzüberlegung an, mit der man Optimalität begründen kann.

(b) Es soll eine oben offene, quaderförmige Kiste mit einem Volumen von 1 m^3 gebaut werden. Dabei soll möglichst wenig Material verwendet werden. Wie müssen Länge, Breite und Höhe gewählt werden, damit die Gesamtfläche der fünf Wände möglichst klein wird?

(24 Punkte)

Aufgabe 2 (Ein zweidimensionales Problem):
Betrachten Sie das Problem

$$\begin{array}{llllll} \min & 2x_1^2 & + & 2x_1x_2 & + & x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\ \textit{mit} & x_1^2 & + & x_2^2 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 6. \end{array}$$

(a) Zeichnen Sie graphisch den zulässigen Bereich. Kennzeichnen Sie jeweils die aktiven Restriktionen.

(b) Untersuchen Sie nun die zulässigen Richtungen für die Punkte mit mindestens einer aktiven Restriktion. Beschreiben Sie (sowohl geometrisch als auch analytisch) für Punkte mit zwei aktiven Restriktionen sämtliche zulässigen Richtungen. Für die Mengen mit genau einer aktiven Restriktion tun Sie dies bitte für jeweils einen Repräsentanten.

(c) Beschreiben Sie nun für jeden der Punkte aus (b) (wieder sowohl geometrisch als auch analytisch) die Mengen von Vektoren, zu denen der Gradient einer Zielfunktion gehören müsste, damit der Punkt überhaupt als lokales Minimum in Frage kommt. (Begründen Sie Ihre Lösung!)

(d) Untersuchen Sie nun die Kuhn-Tucker-Bedingungen. (Dafür müssen Sie die vier möglichen Kombinationen von aktiven Restriktionen durchprobieren, jeweils Multiplikatoren berechnen und überprüfen, ob die Vorzeichen der Multiplikatoren und der inaktiven Restriktionen stimmen.)

(e) Geben Sie schließlich und endlich ein globales Minimum an, falls es eines gibt.

(6+6+6+12+6 Punkte)