Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Andreas Szostak

SS 2002

Einführung in die Optimierung
Übung 4 vom 08.05.02

Abgabe der Aufgaben durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock der Mathematik bis 13:00 (!!) am 15.05.02. (Kasten 3, vom Fahrstuhl links.)

Aufgabe 1 (Steilster Abstieg – mehr als ein Schritt):
Begründen Sie: Die Funktion $x^2 + 4y^2 - xy$ ist konvex.

Wenden Sie dann das Verfahren des steilsten Abstiegs mit dem Startpunkt $(1,1)$ an und führen Sie fünf Iterationen durch. Gegen welchen Punkt konvergiert die Folge? Mit welcher Konvergenzgeschwindigkeit?

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Noch einmal Konvexität):
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, die für $i = 1, \ldots, n$ in $X_i \subseteq \mathbb{R}$ auf der i-ten Komponente monton wachsend ist. Weiter seien für $i = 1, \ldots, n$ auch $g_i : \mathbb{R} \to X_i \subseteq \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Zeigen Sie: $f \circ g = f \circ (g_1, \ldots, g_n)$ ist eine konvexe Funktion.

(10 Punkte)

Aufgabe 3 (Newton mehrdimensional):
(a) Zeigen Sie: Ist die Hesse-Matrix F einer C^2-Funktion f positiv definit und konstant, so findet das Newton-Verfahren in einem einzigen Schritt das Optimum.

(b) Betrachten Sie nun die Funktion $f(x,y) = x^4 + 4y^4 - x^2y^2$. Begründen Sie: f ist konvex. Wenden Sie dann das Newton-Verfahren mit dem Startpunkt $(1,1)$ an und führen Sie drei Iterationen durch. Gegen welchen Punkt konvergiert die Folge? Mit welcher Konvergenzgeschwindigkeit? (20 Punkte)

Aufgabe 4 (Lineare Regression):
Eine Standardmethode zur Extrapolation einer Menge von m Messpunkte (x_i, y_i) ist die *Lineare Regression*. Dabei sucht man eine Gerade $g(x) = ax + b$, die den mittleren quadratischen Fehler minimiert, d.h. man bestimmt $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\min \sum_{i=1}^{n} (y_i - g(x_i))^2$ möglichst klein wird.

Zeigen Sie: Die Zielfunktion ist konvex. Bestimmen Sie sämtliche lokalen Minima $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(15 Punkte)

Bitte wenden!

FREIWILLIGE Zusatzaufgabe:

Aufgabe 5 (Mehrdimensionale lineare Regression):
Jetzt betrachten wir Messwerte, die von mehreren Parameter abhängen, d.h. eine mehrdimensionale Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$. Dafür liegen wieder eine Menge von m Messpunkten der Form $\left(\underline{x}^{(j)}, y^{(j)}\right)$ vor, wobei $\underline{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$. Wieder versucht man, die Funktion f durch eine Hyperebene $g(\underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x} + b = (\sum_{i=1}^n a_i x_i) + b$ zu approximieren und den mittleren quadratischen Fehler $\sum_{j=1}^m (g(\underline{x}^{(j)} - y^{(j)})^2$ zu minimieren.

(a) Zeigen Sie: Die Zielfunktion ist konvex.

(b) Berechnen Sie ein Minimum. (Dabei dürfen Sie geeignete Annahmen darüber machen, dass die Messpunkte nicht degeneriert liegen.)

(20 Punkte)