Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Andreas Szostak

SS 2002

Einführung in die Optimierung
Übung 3 vom 02.05.02

Abgabe der Aufgaben durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock der Mathematik bis 13:00 (!!) am 08.05.02. (Kasten 3, vom Fahrstuhl links.)

Aufgabe 1 (Konvexe Mengen):
Beweisen Sie Satz 5 der Vorlesung:
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt
(a) $conv(X)$ ist konvex.
(b) Sei $X \subseteq Y$, Y konvex. Dann ist $conv(X) \subseteq Y$, d.h. $conv(X)$ ist die kleinste konvexe Obermenge von X.
(c) Sei X konvex. Dann ist $conv(X) = X$.
(d) Sei X konvex. Dann gilt $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to$ konvex $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, \lambda \in [0, 1]$: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

(20 Punkte)

Aufgabe 2 (Richtungen bei steilstem Abstieg):
Sei $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und sei $x_0 \in X$.
Betrachten Sie folgendes iteratives Verfahren zur Auffindung eines Minimums von f:
Solange keine numerische Abbruchbedingung (über Zeit oder Genauigkeit) erfüllt ist und $0 \neq \nabla f \in D(x_i)$ ist, setze $d_i = -\nabla f(x_i)$ und bestimme x_{i+1}, so dass $f(x_{i+1}) = \min\{f(x) | x = x_i + \lambda d_i, \lambda \geq 0\}$.
Da der negative Gradient die Richtung ist, in der sich der Funktionswert lokal am stärksten verringert, nennt man diese Vorgehensweise auch die *Methode des steilsten Abstiegs* – man rollt gewissermaßen in der steilsten Richtung den Hang hinunter, in der Hoffnung, dass man so am schnellsten am Talboden ankommt.
(a) Wenden Sie das Verfahren auf die Funktion $x^2 + 4y^2 - 4xy$ mit dem Startpunkt $(1, 1)$ an und führen Sie fünf Iterationen durch. Gegen welchen Punkt konvergiert die Folge? Mit welcher Konvergenzgeschwindigkeit?
(b) Zeigen Sie für jedes beliebige f und i: d_i und d_{i+1} stehen senkrecht aufeinander. Speziell für $n = 2$ steht die Folge der Richtungen also bis auf das Vorzeichen bereits mit d_0 fest.

(20 Punkte)

Aufgabe 3 (Konvexität quadratischer Funktionen):
Ermitteln Sie unter Verwendung von Satz 8 der Vorlesung, für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

auf $\mathbb{R}^2$ konvex ist. Bestimmen Sie für diese Werte ein globales Minimum von f auf $\mathbb{R}^2$.
(Sie dürfen geeignete Sätze der Linearen Algebra verwenden, z.B. die Tatsache, dass eine Matrix genau dann positiv semidefinit ist, wenn alle Eigenwerte nichtnegativ sind.)

(20 Punkte)