Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Andreas Szostak

SS 2002

Einführung in die Optimierung
Übung 2 vom 24.04.02

Abgabe der Aufgaben vor der Vorlesung am 02.05.02

Aufgabe 1 (Konvexe Funktionen):
(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie: f ist stetig.
(b) Zeigen Sie: Die Funktion x^2 ist auf $\mathbb{R}$ konvex.

(20 Punkte)

Aufgabe 2 (Fixpunkte beim Newtonverfahren):
Wie in der Vorlesung gezeigt, konvergiert das Newtonverfahren gegen eine Nullstelle, wenn man es auf eine konvexe, stetig differenzierbare Funktion mit einem Vorzeichenwechsel anwendet. In dieser Aufgabe soll untersucht werden, was schiefgehen kann und wie ein "Grenzfall" aussieht.

(a) Zeigen Sie: Für $k \in \mathbb{R}, k > 2$ und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^{1/k} & \text{für } x \geq 0 \\ -(-x)^{1/k} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

divergiert die Folge $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ für beliebiges $x_0 \neq 0$.

Außer Konvergenz und Divergenz kann es vorkommen, dass die Folge $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ irgendwann periodisch wiederkehrende Zahlen liefert.
(b) Bestimmen Sie eine auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbare Funktion g mit $g(x) = -g(-x)$, für die jeder Punkt x_0 außerhalb des Ursprungs eine Punktefolge mit Periode 2 liefert. (Untersuchen Sie dafür die Bedingung $x_{i+1} = -x_i$. Daraus ergibt sich eine Differentialgleichung, die sich durch Trennung der Variablen lösen lässt.)

(20 Punkte)

Aufgabe 3 (Konvergenzgeschwindigkeit des Newtonverfahrens):
(a) Beweisen Sie mit Lemma 3 den Satz 2 der Vorlesung:
Sei f eine auf dem Intervall $]a, b[$ zweimal stetig differenzierbare Funktion mit L-Lipschitz-stetig differenzierbarer Ableitung $g = f'$ und mit $|g'| \geq \rho > 0$. Besitzt $g(x) = 0$ eine Lösung $\overline{x} \in]a, b[$, dann existiert für die Newtonfolge $x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)}$ ein $\eta > 0$ mit
1. $|x_{i+1} - \overline{x}| \leq \frac{L}{2\rho}(x_i - \overline{x})^2$,
2. $|x_0 - \overline{x}| < \eta \Rightarrow (x_i) \to \overline{x}$.
Damit konvergiert die Folge (x_i) also lokal quadratisch gegen $\overline{x}$.
(b) Sei $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $x_{i+1} = \Phi(x_i)$. Wie verträgt sich das Ergebnis mit dem in (a) bewiesenen Satz?

(20 Punkte)