

Übung 12 vom 30.01.02 (korrigierte Fassung)

Letzte Übung!

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 07.02.02

Aufgabe 1 (Komplexe Integrale längs geschlossener Wege):

Es sei $B := B_r(c)$ eine Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ um ein $c \in \mathbb{C}$.

- (a) Geben Sie eine Parametrisierung

$$\zeta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \zeta(t)$$

des Randes der Kreisscheibe ∂B (in positiver Orientierung) an.

- (b) Es sei $n \in \mathbb{Z}$. Verwenden Sie die Parametrisierung ζ aus Teil (a), um

$$\int_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta = \begin{cases} 2\pi i, & \text{falls } n = -1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

zu zeigen.

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Integration entlang eines Rechtecks):

Betrachten Sie das Rechteck

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < r, |\operatorname{Im} z| < s\}, \quad r, s > 0.$$

- (a) Geben Sie eine Parametrisierung ζ des Weges entlang ∂R an.

(Hinweis: Zerlegen Sie den Weg in die vier Teilwege entlang der Kanten des Rechtecks und parametrisieren Sie diese getrennt. Achten Sie auf die Orientierung.)

- (b) Berechnen Sie damit das Integral

$$\int_{\partial R} \zeta^{-1} d\zeta.$$

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Eindeutigkeit mit der Cauchyschen Integralformel):

Die Funktionswerte holomorpher Funktionen sind auf wundersame Weise miteinander verknüpft. So benötigt man von solchen Funktionen nur die Werte auf dem Rand einer

Kreisscheibe, um ihren Verlauf auf der gesamten Kreisscheibe zu kennen, wie die Cauchysche Integralformel verrät. Eine Konsequenz dieser Eindeutigkeit zeigt das folgende Beispiel.

Es seien f und g auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B = \overline{B}_r(c)$ mit $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ holomorphe, stetig differenzierbare Funktionen und $\alpha \in \partial\mathbb{E}$.

Zeigen Sie: Gilt $f(\zeta) = g(\alpha(\zeta - c) + c)$ für alle $\zeta \in \partial B$, so folgt $f(z) = g(\alpha(z - c) + c)$ für alle $z \in B$.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Gültigkeit der Gleichung für $c = 0$ und argumentieren Sie dann in kurzen Worten, warum sie auch für $c \neq 0$ bestehen bleibt.)

(15 Punkte)

Aufgabe 4 (Mittelwertungleichung):

Es sei $B := B_r(c)$ die Kreisscheibe um $c \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$ und f eine auf B holomorphe, stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

(a)

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\phi}) d\phi.$$

(Tipp: Verwenden Sie eine geeignete Parametrisierung von ∂B und wenden Sie die Cauchysche Integralformel an.)

(b) Es gilt die Mittelwertungleichung

$$|f(c)| \leq \sup_{z \in \partial B} |f(z)|.$$

(15 Punkte)

Aufgabe 5 (Poissonsche Integrale – Knobel-Zusatzaufgabe):

Es sei $B := B_R(0)$ die Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius R und $f = u + iv$ eine auf B holomorphe (und stetig differenzierbare) Funktion. Zeigen Sie: Für jedes $z \in B$, also für alle $z = re^{i\phi}$ mit $0 \leq r < R$, gelten die *Poissonschen Integraldarstellungen* von u und v

$$u(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \phi) + r^2} dt,$$

$$v(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \phi) + r^2} dt.$$

(Tipp: Der Punkt $w := \frac{R^2}{r}e^{i\phi}$ liegt nicht in B . Zeigen Sie damit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = 0, \quad \text{also} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) d\zeta.$$

Verwenden Sie dann die Polarkoordinatendarstellung von ζ, z, w , um das obige Ergebnis zu erhalten.)

(Im(1200 · exp($i\pi/6$)) Sonderspezialpunkte)