Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Andreas Szostak

WS 2001/02

Praktische Analysis

Übung 11 vom 23.01.02

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 31.01.02

Aufgabe 1 (Lokal-konstante holomorphe Funktionen):
Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ein offener Bereich und $f = u + iv$ eine Funktion, die in D holomorph ist. Zeigen Sie:

(a) Nimmt f nur reelle oder rein imaginäre Werte an, gilt also $u = 0$ oder $v = 0$, so muss f auf D lokal-konstant sein.

(b) Ist für alle $z \in D$ die Bedingung $|f(z)| = 1$ erfüllt, so ist f lokal-konstant auf D.

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Einheitswurzeln):
Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ lässt sich eindeutig in Polarkoordinaten $z = re^{i\phi}$, $r = |z| > 0$, $\phi \in (-\pi, \pi]$ darstellen.

(a) Zeigen Sie, dass die komplexe Exponentialfunktion $i2\pi$-periodisch ist, das heisst es gilt $e^z = e^{z+i2\pi}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $\zeta_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, ?$ der Gleichung $\zeta^n = 1$. Wieviele sind es und warum sind das alle Lösungen?

(Tipp: Verwenden Sie für ζ die Darstellung in Polarkoordinaten.)

(c) Es sei $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = a$.

(d) Es sei ζ eine n-te Einheitswurzel. Zeigen Sie

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = \begin{cases} n & \text{falls } \zeta = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Tipp: Auch für komplexes $q \neq 1$ gilt die geometrische Summenformel. Mit dieser Aufgabe kann man übrigens den Tipp der Aufgabe 3,(a) von Blatt 9 bestätigen.)

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Riemannsche ζ-Funktion):
Die Reihe

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

heisst Riemannsche ζ-Funktion. Zeigen Sie: Die Reihe ist in jeder Halbebene

$$H_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0,$$

gleichmässig und in

$$H^* := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$$

normal konvergent.
(Tipp: Zeigen Sie $|n^z| = n^{\operatorname{Re} z}$, indem Sie die Darstellung $n^z = \exp(z \log n)$ verwenden.)

(15 Punkte)

Aufgabe 4 ($\mathbb{C}$-Welt-Geschichten: Löwenfangen mit der Cayley-Abbildung): Pohl Ohorm, der bekannteste Mathematiker in der $\mathbb{C}$-Welt, war gerade Richtung Norden unterwegs, als ihm an der Hauptstrasse angekommen Unmengen von Menschen entgegenliefen ...

„Wovor rennt ihr denn alle weg?" – „Ein Löwe ist entlaufen!" – „Ja, dann schnell, fangt ihn wieder ein!" – „Das ist nicht so einfach: Er hält sich irgendwo nördlich der Hauptstrasse auf; aber das Gebiet ist unendlich gross!" – „Ach was, das ist einfach. Wir werden den Norden einzäunen." – „Einzäunen? Den ganzen Norden?" – „Naja, wenn der Zaun nicht um das Gebiet passt, vielleicht passt ja das Gebiet in die Umzäunung?" – „W ..." – „Ach, ich zeig's dir."

Pohl Ohorm legte seinen Mantel ab und überlegte kurz. Dann schlug er folgende Vorgehensweise vor:

Wenn man die Hauptstrasse der $\mathbb{C}$-Welt (die reelle Achse) auf den Rand des Marktplatzes (den Einheitskreis) abbildet und dafür sorgt, dass der Norden (die obere Halbebene) auf dem Marktplatz landet, so müsste der Löwe irgendwo auf dem Marktplatz zu finden sein. Der ist nicht besonders gross und der Löwe wäre leicht zu fangen.

Dazu machte er folgenden Ansatz: „Alles was wir brauchen ist eine Abbildung

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C},$$

die die Hauptstrasse auf den Rand des Marktplatzes transformiert. Zum Beispiel könnte sie folgende Bedingungen erfüllen:

$$h(0) = -1, \qquad h(1) = -i, \qquad \lim_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ x\to\infty}} h(x) = 1.$$

Allerdings sollte sie holomorph sein, damit der Löwe nach der Transformation noch als solcher erkennbar ist."

(a) Bestimmen Sie die Funktion h.

(b) Zeigen Sie, dass h auf $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ holomorph ist.

Nachdem auf diese Weise der Löwe gefangen war, suchte Pohl Ohorm verzweifelt seinen Mantel. „Ich glaube, den hattest du am Brunnen abgelegt!" – So ein Pech! Der Brunnen lag vorher bei $-i$. Jetzt ist der Mantel im tiefen Dunkel der Unendlichkeit verschwunden. „Kein Problem", meinte Pohl, „transformieren wir halt zurück!"

(c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion h^{-1}.

(d) Zeigen Sie, dass h^{-1} auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph ist.

„Ah, mein Mantel! Ein Hoch auf die biholomorphen Funk ... Heh! Da ist ja ein Loch drin. Moment, das ist gar kein Loch! Sieht so aus, als hätte sich der gesamte Horizont in diesem Fleck auf meinem Mantel manifestiert!" – „Faszinierend! Und wie du das so schnell berechnet hast ..." – „Nun ja", den Schmutz von seinem Mantel klopfend, „ich muss zugeben, sowas habe ich schonmal gesehen: Die Abbildung h wird auch *Cayley-Abbildung* genannt." – „Cayley, hm? Klingt für mich wie ein Name aus einer fremden Welt ..."

(15 Punkte)