

Übung 10 vom 16.01.02

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 24.01.02

Aufgabe 1 (Vollständige Orthonormalsysteme):

Zeigen Sie: Aus der Gültigkeit der Parsevalschen Gleichung, also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, u_k \rangle^2 = \|f\|^2$$

für jedes Element $f \in L^2[-\pi, \pi]$, folgt die Vollständigkeit des Orthonormalsystems $(u_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Verzweiflung der Bernoulli-Brüder):

Die Brüder Jakob und Johann Bernoulli haben lange Zeit versucht, den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

zu bestimmen. Beide sind an ihr verzweifelt und erst Leonhard Euler konnte das Geheimnis im Jahre 1734 lüften. Jakob Bernoulli war zu diesem Zeitpunkt lange verstorben, sein Bruder Johann jedoch erfuhr von dem Ergebnis und veröffentlichte es unter seinem Namen, ohne Euler zu erwähnen.

- (a) Rächen Sie Euler: Verwenden Sie die Fourier-Reihen der Funktionen x^2 bzw. $|x|$, um den Wert der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

zu bestimmen (benutzen Sie dafür aus der Vorlesung bzw. Übung gewonnene Erkenntnisse). Lösen Sie damit die obige Reihe.

- (b) Lösen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} dx.$$

(Tipp: Für $|x| < 1$ gilt die Potenzreihenentwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Integration und Summation dürfen vertauscht werden. Verwenden Sie eine der oben angegebenen Reihen.)

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Komplexe Differenzierbarkeit):

(a) Sei $f(z) := x^3y^2 + ix^2y^3$. Bestimmen Sie die Menge aller $c = (a, b) \in \mathbb{C}$, für die f komplex differenzierbar ist.

(b) Schreiben Sie $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) := z^3 + 7z^2 + 2z + 1$ als reelle Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und verifizieren Sie, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.

(15 Punkte)

Aufgabe 4 (Komplex differenzierbare Funktionen sind harmonisch):

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst *harmonisch*, wenn für jede Komponentenfunktion $f^{(k)}$ die Bedingung $\sum_{j=1}^n f_{x_j x_j}^{(k)} = 0$ für die zweimaligen partiellen Ableitungen gilt.

Zeigen Sie: Komplex differenzierbare Funktionen $f = (u, v)$ sind notwendigerweise harmonisch, d.h. es gilt $u_{xx} + u_{yy} = 0$ und $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

(Tipp: Beachten Sie, dass die Komponentenfunktionen komplex differenzierbarer Funktionen notwendigerweise stetig partiell differenzierbar sind (warum?) und verwenden Sie einen geeigneten Satz der Analysis II.)

(15 Punkte)