Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Andreas Szostak

WS 2001/02

Praktische Analysis

Übung 9 vom 10.01.02

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 17.01.02

Aufgabe 1 (Explizite Fourier-Reihen):
Berechnen Sie zu den folgenden Funktionen aus $L^2[-\pi, \pi]$ die Fourier-Reihen:

(a) $f(x) = |\sin x|$

(b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-\pi, 0), \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x \in (0, \pi]. \end{cases}$

(10 Punkte)

Aufgabe 2 (Translation auf beliebige Intervalle):
In der Vorlesung wurde für die Fourier-Reihen stets das Intervall $[-\pi, \pi]$ betrachtet. Man kann die Theorie natürlich auf jedes beliebige kompakte Intervall übertragen: Betrachten Sie das allgemeine Intervall $[a, b]$, $a < b$. Der Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ wird analog mit $L^2[a, b]$ bezeichnet und auf ihm wird das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

für alle $f, g \in L^2[a, b]$ definiert.

(a) Wie lauten die trigonometrischen Ausdrücke auf dem Intervall $[a, b]$?
(Hinweis: Stauchen bzw. Strecken Sie die Funktionen $\sin(nx)$ bzw. $\cos(nx)$, so dass wieder n Perioden in dem Intervall $[a, b]$ liegen. Translatieren Sie den Ursprung an die Stelle a.)

(b) Wie lauten die orthonormierten trigonometrischen Ausdrücke $\tilde{u}_k$ auf dem Intervall $[a, b]$?
(Tipp: Verwenden Sie die trigonometrischen Formen aus Teil (a) und normieren Sie sie mit positiven Faktoren.)

(c) Wie erhält man die Fourier-Koeffizienten eines Elements $f \in L^2[a, b]$ zu den normierten trigonometrischen Formen $\tilde{u}_k$ aus Teil (b), wie zu den nicht normierten Formen aus Teil (a)?

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Einige Eigenschaften der Fourier-Transformation):
Im folgenden sei f die 2π-periodische Fortsetzung eines Elements aus $L^2[-\pi,\pi]$ mit den Fourier-Koeffizienten a_n, b_n. Zeigen Sie:

(a) Die Fourier-Koeffizienten der Funktion $g(x) = f(kx)$, $k \in \mathbb{N}$, lauten $\tilde{a}_n = a_{n/k}$ bzw. $\tilde{b}_n = b_{n/k}$, falls k ein Teiler von n ist, sonst $\tilde{a}_n = \tilde{b}_n = 0$.
(Tipp: Wenn k kein Teiler von n ist, so gilt

$$0 = \sum_{l=0}^{k-1} \sin\left(2\pi \frac{ln}{k} + \alpha\right)$$

für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$.)

(b) Die Fourier-Koeffizienten der Funktion $g(x) = f(x+\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, lauten $\tilde{a}_n = a_n \cos(n\alpha) + b_n \sin(n\alpha)$ bzw. $\tilde{b}_n = b_n \cos(n\alpha) - a_n \sin(n\alpha)$.

(c) h sei eine weitere Funktion aus $L^2[-\pi,\pi]$ mit den Fourier-Koeffizienten α_n, β_n. Zeigen Sie: Für die *Faltung*

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, h(x-y)\, dy$$

erhält man die Fourier-Koeffizienten $\tilde{a}_n = \pi(a_n\alpha_n - b_n\beta_n)$ bzw. $\tilde{b}_n = \pi(a_n\beta_n + b_n\alpha_n)$.
(Die Faltung geht in ein Produkt über; diese Eigenschaft wird deutlicher, wenn man mit der komplexwertigen Fourier-Reihe arbeitet.)

Mit diesen Regeln kann man aus bereits bekannten Fourier-Reihen neue gewinnen: Verwenden Sie Teil (b) und Aufgabe 1, um die Fourier-Koeffizienten der Funktion $|\cos x|$ zu bestimmen.

(20 Punkte)

Aufgabe 4 (Partialbruchzerlegung des Kotangens hyperbolicus):
Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion $f(x) = \cosh(\alpha x)$ auf $[-\pi,\pi]$ für $\alpha \neq 0$ (Hinweis: Die Fourier-Reihe konvergiert punktweise gegen f). Setzen Sie einen geeigneten Wert für x ein, um die Partialbruchzerlegung

$$\pi \coth(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2}$$

von $\coth(\alpha\pi)$ für $\alpha \neq 0$ zu erhalten.
(Tipp: Es gilt $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$. $\cosh x$ ist eine gerade, $\sinh x$ ist eine ungerade Funktion.)

(15 Punkte)