

Übung 8 vom 12.12.01

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 20.12.01

Aufgabe 1 (Fehler der Keplerschen Fassregel):

Oftmals steht man vor dem Problem, ein Integral nicht berechnen zu können, da keine explizite Stammfunktion ausfindig gemacht werden kann. Es gibt jedoch numerische Methoden (Quadraturverfahren), mit denen der Wert des Integrals approximiert werden kann. Man macht sich dazu die Tatsache zunutze, mit Polynomen jede stetige Funktion beliebig gut auf einem kompakten Intervall approximieren zu können. Den Wert des tatsächlichen Integrals ersetzt man dann durch den Wert, den das Integral über das Polynom liefert. Eines dieser Verfahren beruht auf der Keplerschen Fassregel (vgl. Aufgabe 5 von Blatt 7): Die Funktion wird mit einem Polynom zweiten Grades zu den Stützstellen $a, \frac{a+b}{2}, b$ interpoliert. Die resultierende Formel für das „Ersatzintegral“ lautet

$$\int_a^b f(x) dx \approx Q[f] := \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Wie so oft ist man an dem Fehler interessiert, den man bei dieser Approximation macht. Zeigen Sie: Existiert f''' und gilt $f'''(x) \leq M$ auf $[a, b]$, so gilt für den Fehler die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Q[f] \right| \leq 0,0082(b-a)^4 M.$$

(Hinweis: Betrachten Sie das Intervall $[-h, h]$. Für die Funktion f gilt mit der Lagrange-Restgliedformel die Darstellung

$$f(x) = p(x) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{3!} f'''(\xi) \quad \text{mit} \quad \xi \in (-h, h).$$

Bestimmen Sie das Maximum des auftauchenden Polynoms dritten Grades. Schätzen Sie damit zunächst den Fehler der Interpolation, danach den Fehler der Keplerschen Fassregel nach oben ab.)

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung):

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y'' + 3y' - 10y = 0, y(0) = 7/10, y'(0) = 0$

(b) $y'' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

(c) $2y'' + 8y' + 10y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

(d) $y'' - 3y' + 2y = x, y(0) = 1, y'(0) = 7/8$

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Homogene lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung):

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. das Anfangswertproblem:

(a) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

(b) $y^{(4)} - y''' + y'' - y' = 0$

(c) $y''' + 4y' = 0, y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1$

(15 Punkte)

Aufgabe 4 (Gedämpfte harmonische Schwingung):

Ein Massepunkt sei mit einer Feder im Ursprung befestigt und bewege sich auf der x -Achse. Bei nicht allzu grosser Auslenkung schwingt er dann harmonisch, das heisst die Rückstellkraft $m\ddot{x}$ ist proportional zur momentanen Auslenkung $x(t)$. Ist die Bewegung zusätzlich durch eine geschwindigkeitsproportionale Reibung behindert, so gehorcht der Massepunkt insgesamt der Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx$$

mit Konstanten $m, r, k > 0$. Diese Gleichung wird oft mit den Substitutionen $\rho := r/(2m)$ und $\omega_0 := \sqrt{k/m}$ in die Form

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

gebracht und die *Gleichung des gedämpften harmonischen Oszillators* genannt. Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung für die Fälle

(a) $\rho > \omega_0$, (b) $\rho = \omega_0$ und (c) $\rho < \omega_0$.

Was ergeben sich jeweils für Bewegungen? Der Oszillator werde nun mit einer festen Schwingung $a \cos(\omega t)$ angeregt. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = a \cos(\omega t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

für die Fälle

(d) $\rho = 0$ und (e) $\rho > 0$.

(Tipp: Um eine partikuläre Lösung für den Teil (e) zu bestimmen, machen Sie den Ansatz $x_p(t) = Ae^{i\omega t}$ und ersetzen Sie $a \cos(\omega t)$ durch $e^{i\omega t}$. Benutzen Sie die Eulersche Formel $e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha(\cos \beta + i \sin \beta)$, um x_p in Real- und Imaginärteil zu trennen. Verwenden Sie für die Lösung nur den Realteil.)

(15 Punkte)