

Übung 7 vom 05.12.01

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 13.12.01

Aufgabe 1 (Bedingte Exaktheit):

Geben Sie an, unter welcher Bedingung die folgenden Differentialgleichungen exakt sind:

- (a) $ax + by + c + (\alpha x + \beta y + \gamma)y' = 0$
 (b) $ax^2 + bxy + cy^2 + (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)y' = 0$

(10 Punkte)

Aufgabe 2 (Picard-Lindelöf ohne Lipschitz):

Der Satz von Picard-Lindelöf gibt Auskunft darüber, unter welchen Voraussetzungen es eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

gibt. Neben der Stetigkeit wird von f gefordert, bezüglich y einer Lipschitzbedingung zu genügen. Dass diese Bedingung wesentlich ist, soll in den folgenden Aufgabeteilen erarbeitet werden.

- (a) Es seien ein Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und ein kompaktes Rechteck $R \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf gegeben, sowie eine auf R definierte stetige reellwertige Funktion f , die keiner Lipschitzbedingung genügt. Zeigen Sie: Die gleichmässige Konvergenz der Funktionenfolge (φ_n) ist hinreichend dafür, dass die Grenzfunktion das Anfangswertproblem löst. (Anmerkung: Man kann allerdings nichts über die Eindeutigkeit der Lösung sagen.)
- (b) Es sei $R := \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ und f die auf R definierte stetige Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 2x & \text{für } 0 < |x| \leq 1, -1 \leq y < 0, \\ 2x - 4\frac{y}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, \\ -2x & \text{für } 0 < |x| \leq 1, x^2 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie: f erfüllt keine Lipschitzbedingung bezüglich y und die Funktionenfolge (φ_n) führt nicht auf eine Lösung des Anfangswertproblems mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$. (Hinweis: Verwenden Sie $\varphi_0 = 0$ als Startfunktion).

Mit den Funktionenfolgen (φ_n) sind jeweils die im Satz definierten Folgen gemeint.

(16 Punkte)

Aufgabe 3 (Numerische Lösungen von Differentialgleichungen):

Sehr häufig steht man vor dem Problem, ein Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

nicht explizit oder gar nicht lösen zu können. In diesen Fällen bleibt nur der Ausweg, die Lösung mit numerischen Methoden zu approximieren. Zwei dieser Verfahren werden hier vorgestellt.

- *Euler-Cauchy-Polygonzugverfahren*: Von der bekannten Lösung $y(x_0) = y_0$ ausgehend versucht man, durch schrittweises Durchlaufen des Intervalls $[x_0, x_0 + a]$ den Wert $y(x_0 + a)$ anzunähern. Das geschieht durch die rekursive Vorschrift

$$y_\nu = y_{\nu-1} + hf(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}), \quad h := \frac{a}{n}, \quad 1 \leq \nu \leq n,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Schritte vorgibt. Die gesuchte Näherung ist dann $y(x_0 + a) \approx y_n$.

- *Runge-Kutta-Verfahren*: Auch hier wird das Intervall $[x_0, x_0 + a]$ in n Schritten durchlaufen, um eine Näherung für $y(x_0 + a)$ zu bestimmen. Die Rekursionsvorschrift lautet

$$\begin{aligned} k_{\nu 1} &:= f(x_\nu, y_\nu) \\ k_{\nu 2} &:= f\left(x_\nu + \frac{1}{2}h, y_\nu + \frac{1}{2}hk_{\nu 1}\right) \\ k_{\nu 3} &:= f\left(x_\nu + \frac{1}{2}h, y_\nu + \frac{1}{2}hk_{\nu 2}\right) \\ k_{\nu 4} &:= f(x_\nu + h, y_\nu + hk_{\nu 3}) \\ k_\nu &:= \frac{h}{6}(k_{\nu 1} + 2k_{\nu 2} + 2k_{\nu 3} + k_{\nu 4}) \\ y_{\nu+1} &:= y_\nu + k_\nu \end{aligned}$$

für $0 \leq \nu \leq n - 1$. Die gesuchte Näherung ist wiederum $y(x_0 + a) \approx y_n$.

Um die Güte dieser Verfahren besser einschätzen zu können, werden sie hier auf eine explizit lösbare Differentialgleichung angewendet.

- (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y + 1, \quad y(2) = 2.$$

- (b) Bestimmen Sie die numerische Lösung von $y(3)$ mit dem Euler-Cauchy-Polygonzugverfahren für $n = 4$ auf drei Nachkommastellen genau und geben Sie den Fehler in Prozent an.

- (c) Wenden Sie das Runge-Kutta-Verfahren für $n = 1$ und $n = 2$ an, um $y(3)$ zu approximieren. Rechnen Sie dazu wieder mit drei Dezimalen nach dem Komma und geben Sie den Fehler in Prozent an.

(Vergleichen Sie mal die Genauigkeit der beiden Verfahren, insbesondere unter dem Aspekt, dass für den Euler-Cauchy-Polygonzug mit $n = 4$ und das Runge-Kutta-Verfahren mit $n = 1$ jeweils vier Funktionswerte benutzt werden!)

(24 Punkte)

Aufgabe 4 (Eulerhomogene Differentialgleichung):

Eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

heißt *Eulerhomogene Differentialgleichung*. Bringen Sie sie durch eine geeignete Substitution auf eine Form, die eine Lösung mittels Trennung der Veränderlichen gestattet. Folgern Sie damit, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{x + 2y}{2x + y}, \quad y(1) = 0$$

gegeben ist durch

$$x + y = (x - y)^3.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 5 (Runge-Kutta und Kepler – Knobel-Zusatzaufgabe):

Es sei ein Anfangswertproblem der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = 0$$

gegeben. Zeigen Sie: Die Runge-Kutta-Näherung an der Stelle $x_0 + h$ (also y_1 in der Notation von Aufgabe 3) ist gegeben durch die Keplersche Fassregel

$$\frac{h}{6} \left(f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f(x_0 + h) \right).$$

(5,998 Sonderspezialpunkte)