

Übung 6 vom 28.11.01

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 06.11.01

Aufgabe 1 (Bevölkerungswachstum in Entwicklungsländern):

Untersuchungen haben ergeben, dass das Bevölkerungswachstum in Entwicklungsländern sich nicht wie $dP/dt = \alpha P$ verhält, sondern eher durch die Differentialgleichung

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P^\beta$$

mit Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta > 1$ beschrieben wird.

Lösen Sie diese Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $P(0) = P_0$ und zeigen Sie: Die Wachstumsrate ist so gross, dass $P(t)$ schon in endlicher Zeit T über alle Schranken wächst. Berechnen Sie T .

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Trennung der Veränderlichen):

(a) Zeigen Sie: Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \quad b \neq 0$$

wird durch die Substitution $z = ax + by + c$ in eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen überführt.

Lösen Sie mit diesem Ansatz:

(b) $y' = (x + y)^2$

(c) $y' = (x - y)^2, \quad -1 < x - y < 1$

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Exakte Differentialgleichungen):

Prüfen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit und lösen Sie sie ggf. mit einem integrierenden Faktor. Falls möglich, geben Sie die Lösung in expliziter Form an.

(a) $(e^y + y \cos(xy))dx + (xe^y + x \cos(xy))dy = 0$

(b) $xy^2 + y - xy' = 0$

(c) $(\cos y + 2xy) + (x^2 - y - x \sin y)y' = 0, \quad y(0) = \sqrt{2}$

(d) $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$

(Tipp: Die integrierenden Faktoren sind nur von einer Variablen abhängig.)
(15 Punkte)

Aufgabe 4 (Spezielle integrierende Faktoren):

Unter Umständen kann es sehr schwierig sein, integrierende Faktoren zur Lösung nicht exakter Differentialgleichungen zu finden. In einigen Fällen kann man sie jedoch direkt angeben.

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

mit auf einem Rechteck R stetig partiell differenzierbaren Funktionen P und Q . Zeigen Sie:

(a) Hängt die Funktion

$$f := \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

nur von der Variablen x ab, so ist $M(x) := \exp(\int f(x) dx)$ ein integrierender Faktor.

(b) Gilt

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

so ist $M := 1/(P^2 + Q^2)$ ein integrierender Faktor.

(15 Punkte)

Die Fachgruppe Mathematik lädt herzlich ein zur
Nikolausfeier der Mathematik
am 6. Dezember ab 18.00 Uhr in der Hängemathe und F315.