TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Andreas Szostak

WS 2001/02

Praktische Analysis

Übung 5 vom 21.11.01

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 29.11.01

Aufgabe 1 (Datierung mittels Radiokarbonmethode):
In der Natur frei vorkommender Kohlenstoff ist ein Isotopengemisch aus C^{14} und C^{12}. C^{14} ist radioaktiv und es zerfällt ständig ein konstanter Anteil von 0,012 %/Jahr. Das Verhältnis in der freien Natur bleibt aber konstant, da ständig in der Atmosphäre durch Höhenstrahlung C^{14} neu entsteht. Lebende Organismen nehmen ständig durch ihre Nahrung so schnell und so viel Kohlenstoffgemisch auf, dass ihr relatives Verhältnis konstant bleibt. Stirbt ein Lebewesen, stoppt die C^{14}-Zufuhr und der Zerfallsprozess läuft ungestört ab. Daher lässt sich aus dem relativen C^{14}-Anteil (den man aufgrund seines radioaktiven Zerfalls direkt messen kann) im Vergleich zum ursprünglichen Anteil direkt die Zeit seit dem Sterbedatum hochrechnen.

Diese sogenannte C^{14}-Methode wird für die Datierung von historischen und fossilen Objekten eingesetzt. Für ihre Entwicklung erhielt der Chemiker W. F. Libby 1960 den Nobelpreis.

(a) Zeigen Sie: Die sogenannte **Halbwertszeit** von C^{14}, d.h. die Zeitspanne, in der sich eine gegebene Anzahl von C^{14}-Atomen durch radioaktiven Zerfall halbiert, beträgt etwa 5776 Jahre.

(b) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die den zeitlichen Verlauf des relativen C^{14}-Anteils $a(t)$ beschreibt, und lösen Sie sie unter der Annahme, dass der Anteil zum Zeitpunkt $t = 0$ gerade a_0 beträgt.

(c) Bei einer Papyrusrolle, die in der Nähe des Toten Meeres in einer Höhle gefunden wurde, beträgt der C^{14}-Anteil nur noch 78% des "frischen" Anteils. Wie alt würden Sie die Schriftrolle schätzen?

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Ausbreitung von Gerüchten):
"Pst! Hast Du schon gehört? Am 28.11.01 um 17:00 gibt's in der Aula einen mathematischen Vortrag für ein breites Publikum mit anschließendem Buffet..."

— In einer Population von N Studenten breitet sich ein Gerücht aus. Zum Zeitpunkt t seien $I(t)$ Studenten informiert. Die Ausbreitung des Gerüchtes erfolgt ausschließlich über Mundpropaganda: Pro Zeiteinheit trifft jeder Studierende $k > 0$ Kommilitonen. Nehmen wir an, dass diese Kontakte völlig zufällig in der Studentenpopulation verteilt sind (also ein Informierter einen Anteil von qk Nichtinformierten trifft und informiert, wobei q der relative Anteil der Nichtinformierten ist).

Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die die Ausbreitung des Gerüchtes beschreibt, und lösen Sie sie unter der Annahme, dass zum Zeitpukt 0 genau ein Student Bescheid weiss!

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Lineare Differentialgleichungen):
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme; geben Sie falls nötig an, für welchen Wertebereich die bestimmte Lösung sinnvoll ist.

(a) $y' = 2xy + x, y(0) = 1$,

(b) $y' = \frac{x-4xy}{1+x^2}, y(1) = 1$,

(c) $y' = 2xy + 1, y(0) = 0$.

(Hinweis: Nicht jedes Integral lässt sich in geschlossener Form lösen!)

(15 Punkte)

Aufgabe 4 (Bernoullische Differentialgleichung):
Die sogenannte *Bernoullische Differentialgleichung* hat die Form

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x)y^\rho,$$

wobei ρ eine fest reelle Zahl ist.

Zeigen Sie: Sind $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ auf dem Intervall I stetig, so besitzt die Anfangswertaufgabe mit der Randbedingung $v(x_0) = y_0 > 0$ für $\rho \neq 0, 1$ genau eine Lösung auf einem x_0 enthaltenden Teilintervall von I.

(Tipp: Betrachten Sie die Substitution $z = y^{1-\rho}$, lösen Sie die entstehende Gleichung, dann substituieren Sie $y = z^{1/(1-\rho)}$. Auf welchem Teilintervall ist y definiert?)

(15 Punkte)

Aufgabe 5 (Verallgemeinerte logistische Gleichung – Knobel-Zusatzaufgabe):

Auch die logistische Gleichung für das Wachstum einer Population

$$P' = \gamma P \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

lässt sich noch weiter modifizieren, um eine genauere Modellierung zu erhalten. So haben Gilpin und Ayala 1973 vorgeschlagen, statt dessen

$$P' = \gamma P \left(1 - \left(\frac{P}{K}\right)^{\theta}\right)$$

zu betrachten, wobei $\theta > 0$ eine Konstante ist, die für wirbellose Tiere nicht größer als 1, für Wirbeltiere aber echt größer als 1 ist.

Zeigen Sie, dass die *verallgemeinerte logistische Gleichung* mit der Anfangsbedingung $P(0) = P_0 > 0$ die eindeutig bestimmte Lösung

$$P(t) = \frac{K}{\left(1 + \left(\left(\frac{K}{P_0}\right)^{\theta} - 1\right) e^{-\gamma\theta t}\right)^{1/\theta}}$$

hat.

(Tipp: Aufgabe 4!)

($(2,71828)^2$ Sonderspezialpunkte)