**Abteilung für Mathematische Optimierung**
**TU Braunschweig**

Prof. Dr. Sándor Fekete
Andreas Szostak

**WS 2001/02**

**Praktische Analysis**

# Übung 4 vom 14.11.01

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 22.11.01

**Aufgabe 1 (Rotation über geschlossene Flächen):**
Gegeben sei eine beliebige $C^2$-Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und eine in sich geschlossene Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie mit dem Satz von Gauß im Raum

$$\int_F \operatorname{rot} f \cdot d\sigma = 0.$$

(Tipp: Verifizieren Sie zuerst $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$.)

(b) Wie kann man dieses Ergebnis mit dem Satz von Stokes erhalten?
(Tipp: Zerschneiden Sie die Fläche $F$ mit einer Ebene und überlegen Sie, wie integriert werden muss.)

(15 Punkte)

**Aufgabe 2 (Stokes bei der Arbeit):**
Betrachten Sie das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix}.$$

Integrieren Sie $\operatorname{rot} f$ auf der Fläche, die durch

$$\Phi : K \to \mathbb{R}^3, \ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1+v)\cos u \\ (1+v)\sin u \\ v^2 \end{pmatrix}, \qquad K := [0, \pi] \times [0, 1]$$

parametrisiert ist, einmal direkt und einmal mit dem Satz von Stokes.

(15 Punkte)

**Aufgabe 3 (Sektorflächenformel):**
Es sei $\rho(\varphi) > 0$ ein winkelabhängiger Radius. Zeigen Sie für den vom Radius $\rho(\varphi)$ zwischen den Winkeln $\varphi_1$ und $\varphi_2$ überstrichenen Sektor

$$B := \{(r, \varphi)^T \mid 0 \le r \le \rho(\varphi), \ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\} \subset \mathbb{R}^2$$

die Sektorflächenformel

$$|B| = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

(15 Punkte)

**Aufgabe 4 (Das 2. Keplersche Gesetz):**

Ein Massepunkt bewege sich unter dem Einfluss einer Zentralkraft; das ist ein Kraftfeld, welches an jeder Stelle im Raum in Richtung des Ursprungs zeigt oder davon weg. Dann bewegt sich der Massepunkt innerhalb einer Ebene, dies sei die $x$-$y$-Ebene. Die Bahn des Teilchens werde mit dem Zeitparameter $t$ beschrieben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Der Drehimpuls $\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ ist unter einer Zentralkraft konstant:

$$\vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} = c$$

(a) Beschreiben Sie die Bahn durch Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi(t) \\ r(t)\sin\varphi(t) \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie den Drehimpuls bezüglich $r$ und $\varphi$.

(b) Es seien $\varphi_1 := \varphi(t_1)$ und $\varphi_2 := \varphi(t_2)$. Zeigen Sie, dass der Radiusvektor $r(t)$ in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, speziell in der Zeit von $t_1$ bis $t_2$ die Fläche

$$|B| = \frac{c}{2}(t_2 - t_1).$$

(Tipp: Verwenden Sie die Sektorflächenformel aus der obigen Aufgabe und substituieren Sie $\varphi = \varphi(t)$.)

(15 Punkte)

**Aufgabe 5 (Ein Angebot der WM-Bank – Knobel-Zusatzaufgabe):**

Es hatte alles so gut geklungen. Beeindruckt vom neuesten Werbespot der Firma Wolfsmagen hatte sich Florian Wirt-Meister in den Showroom verirrt, um sich das neue Cabrio-Sondermodell "Orkan" anzusehen. Schnell hatte ihm der aalglatte Verkäufer die Vorzüge gegenüber seinem angerosteten Stadtrad klargemacht. "Von 0 auf 100 in unter einer Sekunde! Das Ding hat einen integrierten infinitesimalen Hyperdrive, der beschleunigt so schnell, dass sich Ihre Rückleuchten ins Infrarot verschieben!" Den Hinweis auf sein knapp bemessenes Studenten-Budget hatte der Händler mit einem diabolischen Lächeln entkräftet: "Aber das ist doch ü-b-e-r-h-a-u-p-t kein Problem! Sie können das Schmuckstück nach einem Jahr zum Originalpreis zurückgeben, wenn Sie die sogenannte Mephisto-Option wählen – bitte hier kurz einen Daumenabdruck... Danke! Hier, ein Pflaster... Ach, der Zwischenzeitraum? Dafür gibt es e-x-z-e-l-l-e-n-t-e Finanzierungsmöglichkeiten durch unsere Hausbank, und die Zinsen sind ja auch im Moment recht niedrig. Für dieses Modell haben wir sogar eine besonders attraktive Spezialfinanzierung von $\epsilon$. Sie als Mathematiker wissen ja: sozusagen NICHTS!"

Jetzt saß Florian mit dem Vertrag und immer noch leicht blutendem Daumen in seiner kleinen Studentenbude und las das Kleingedruckte. "Herzlichen Glückwunsch zum Erwerb unseres Hyperspezialmodells Orkan.... bla bla bla..." Hoppla!! "Beachten Sie bitte, dass bei Finanzierungsplänen eine infinitesimale Spezialverzinsung zugrundegelegt wird. Hierfür wird der marktgängige Jahreszins auf infinitesimale Zeiträume bezogen und jeweils momentan abgezinst. Bei Verzicht auf den infinitesimalen Hyperdrive kann ein normaler Jahreszins gewählt werden."

Na gut. Der momentane Kreditzins lag bei $z = 6\%$. Das war ja schon recht happig, für die 6000 DM würde er seine Oma anpumpen müssen, auch ohne Hyperdrive. Aber diese Spezialverzinsung... Wenn er den Zinssatz jetzt also auf einen Monat bezog, dann waren das 0,5% im Monat, dafür aber 12 Zinszeitpunkte. Wenn man das also jetzt mal allgemein hinschrieb, dann hatte er für die Zeit $\varepsilon$ einen Zinssatz von $z\varepsilon$, aber dafür $1/\varepsilon$ Zinszeiträume... Dann stand da NULL, dort UNENDLICH. Ähhhh. Hätte er doch bloss in Analysis aufgepasst!

Können Sie Florian helfen? Was würde ihn bei einem Basispreis von 100.000 DM der Hyperdrive in dem einen Jahr kosten??

(Berechnen Sie den Unterschied zwischen den Kosten für jährliche Verzinsung und momentane Verzinsung, bezogen auf ein Jahr und einen Kreditbetrag von 100,000 DM.

Tipp: Leiten Sie eine geeignete Differentialgleichung her und lösen Sie sie!)

**$((2,71828)^2$ Sonderspezialpunkte)**