

Übung 2 vom 31.10.01

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 08.11.01

Aufgabe 1 (Green bei der Arbeit):

Betrachten Sie das Kraftfeld

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 8x + 9y \end{pmatrix} \text{ mit } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Berechnen Sie die Arbeit, die dieses Kraftfeld leistet, wenn ein Massepunkt die Ellipse

$$x = 3 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi \text{ durchläuft.}$$

(a) Berechnen Sie das Wegintegral direkt.

(b) Verwenden Sie den Satz von Green.

(12 Punkte)

Aufgabe 2 (Rotation und Divergenz):

Betrachten Sie die folgenden Vektorfelder f_i und Mengen B_i . Berechnen Sie jeweils das Wegintegral bei Durchlaufen des Randes δB_i von B_i und das Flussintegral aus B_i heraus. Sie haben jeweils die Wahl, ob Sie die entsprechenden Integrale direkt über den Rand berechnen oder mit den Sätzen von Green bzw. Gauss in Flächenintegrale verwandeln.

(a)

$$f_1(x, y) := \begin{pmatrix} 2y \\ 6x \end{pmatrix}; B_1 := [0, 1] \times [0, 1].$$

(b)

$$f_2(x, y) := \begin{pmatrix} y^2 \\ 2x \end{pmatrix}; B_2 := [0, 1] \times [0, 1].$$

(c)

$$f_3(x, y) := \begin{pmatrix} xy \\ x - y \end{pmatrix}; B_3 := [0, 1] \times [0, 3].$$

(d)

$$f_4(x, y) := \begin{pmatrix} x - y^3 \\ x^3 - y^2 \end{pmatrix}; B_4 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(e)

$$f_5(x, y) := \begin{pmatrix} e^x \sin y \\ e^x \cos y \end{pmatrix}; B_5 := [0, 1/2] \times [0, 1] \cap \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(30 Punkte)

Aufgabe 3 (Fläche eines Zykloids):

Betrachten wir ein Rad vom Radius r , das zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Punkt P den Ursprung $(0, 0)$ berührt während sein Mittelpunkt sich im Punkt $(0, r)$ befindet. Nun rollt dieses Rad entlang der x -Achse, bis P wieder den Boden berührt.

Bestimmen Sie die Fläche, die zwischen der von P beschriebenen Kurve und der x -Achse liegt.

(18 Punkte)

(Tipp: Parametrisieren Sie die Kurve durch die Position t des Mittelpunktes; verwenden Sie dann die Flächenformel aus der Vorlesung, während Sie den Rand der Fläche durchlaufen.)