

Übung 1 vom 24.10.01

Abgabe der Aufgaben in den Kleingruppen am 01.11.01

Aufgabe 1 (Rotation und Potential):

(a) Zeigen Sie: Die Funktion

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \text{ mit } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

ist stetig differenzierbar und erfüllt das Rotationskriterium

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial y}.$$

Trotzdem gibt es geschlossene Wege, auf denen das Wegintegral nicht verschwindet.

(Tipp: Betrachten Sie einen Kreis vom Radius 1, der den Ursprung umkreist.)

(b) Betrachten Sie das Vektorfeld

$$g(x, y, z) := \begin{pmatrix} -y\omega \\ x\omega \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Interpretieren Sie g , und bestimmen und erläutern Sie $\operatorname{rot} g$!

(12+8 Punkte)

Aufgabe 2 (Das Fermat-Weber-Problem ist algebraisch schwer):

Betrachten Sie die Punktmenge $P = \{(3, 0), (-3, 0), (1, 3), (-1, 3), (0, 4)\}$.

Zeigen Sie: Die Lösung des Fermat-Weber-Problems, d.h. ein optimaler Zentralpunkt $z = (0, y)$, der bezüglich der $\|\cdot\|_2$ -Norm die Summe der euklidischen Abstände minimiert, erfüllt die Bedingung

$$p(y) := 15y^8 - 180y^7 + 1030y^6 - 4128y^5 + 11907y^4 - 15876y^3 - 17928y^2 + 75816y - 54756 = 0$$

(Tipp: Betrachten Sie die Ableitung nach y und formen Sie diese geeignet um.)

(15 Punkte)

Bemerkung: Mit Methoden der Algebra (Galoistheorie) kann man zeigen, dass eine Nullstelle des Polynoms $p(y)$ nicht mit Radikalen konstruiert werden kann (also durch Kombinationen von Grundrechenarten mit Wurzelziehen). Insbesondere folgt, dass sich der Optimalpunkt für das beschriebene Zentralpunktproblem nicht durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal finden lässt. Dieses Ergebnis von Bajaj stammt aus dem Jahre 1988, ist also noch relativ neu.

Aufgabe 3 (Lokale Optimalität für das Fermat-Weber-Problem):

Sei $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ eine endliche Menge von Punkten in $\mathbb{R}^2$ und sei z eine Optimallösung des Fermat-Weber-Problems, die nicht mit einem Punkt in P zusammenfällt. Sei ϕ_i der Winkel, der zwischen der positiven x -Achse und dem Strahl von z durch p_i gebildet wird.

(a) Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^n \sin \phi_i = 0$$

und

$$\sum_{i=1}^n \cos \phi_i = 0.$$

(Tipp: Verifizieren Sie zunächst, dass der Gradient bezüglich eines einzelnen Punktes p ein Einheitsvektor mit Richtung von p nach z ist. Interpretieren Sie dann den gesamten Gradienten geometrisch als die Summe von n Einheitsvektoren und betrachten Sie die x - und y -Komponenten.)

(b) Für den Fall $n = 3$ liegen zwischen den drei Strahlen von z nach p_1, p_2, p_3 genau 120° .

(Tipp: Betrachten Sie die Winkel bezüglich einem Strahl von z durch p_1 statt zur x -Achse. Folgern Sie durch Betrachtung senkrecht zu diesem Strahl, dass die Richtungen von p_2 und p_3 symmetrisch bezüglich diesem Strahl sind. Schließen Sie durch Betrachtung parallel zum Strahl auf die gesuchten Winkel.)

(15+10 Punkte)

Bemerkung: Das Problem für drei Punkte stammt von Fermat; das obige Resultat stammt von Cavalieri (1647). Allerdings hatte er damals noch keine Argumente über Gradienten zur Verfügung, Differentialrechnung gab's noch nicht!