

Übung 0 vom 17.10.01

(Diese Aufgaben sollen nur zum Nachdenken über einige Methoden anregen und zeigen, wie schnell man mit einfachem Handwerkszeug bei anschaulichen und doch spannenden Problemen ist; sie sind daher nur eine Art “Ouvertüre” und bauen weder auf dem Stoff der Vorlesung auf, noch werden ihre Ergebnisse vorausgesetzt!)

Besprechung der Aufgaben 1–4 in den Kleingruppen am 25.10.01;
Besprechung von einigen Aspekten der Aufgabe 5 (und allerlei Hintergrund) in der großen Übung am 23.10.01

Betrachten Sie die Menge $\mathbb{R}^2$. Dann seien

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto |x_1| + |x_2| \end{aligned}$$

die 1-Norm (oder Manhattan-Norm) des $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

die 2-Norm (oder Euklidische Norm) des $\mathbb{R}^2$. Außerdem seien

$$\begin{aligned} L_1 : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) = ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} L_2 : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) = ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 1 (Standortoptimierung 0 – Abstandsmaße):

Zeigen Sie:

- L_1 und L_2 sind Metriken des $\mathbb{R}^2$. (Man verwendet auch die Bezeichnungen *Manhattan-* und *Euklidische Metrik*.)
- $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind stetige Abbildungen des $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.
- $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind stetig differenzierbare Abbildungen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wie ist es um (stetige) Differenzierbarkeit im Ursprung bestellt?
- Geben Sie die Ableitungen von $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ an. (Wieviele Dimensionen hat der Bildraum?)

Aufgabe 2 (Standortoptimierung I – Lokale Optimalität):

Bei der Wahl eines optimalen Standortes ist ein wichtiger Aspekt, eine Funktion der Weglängen zu den zu beliefernden Kunden zu minimieren. Dabei spielt es natürlich eine Rolle, wie man die geometrisch Weglängen misst und wie stark man kürzere und längere Weglängen gewichtet.

Betrachten Sie zum Beispiel die Situation in Abbildung 1, in der die Kunden die Punktmenge $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$ bilden:

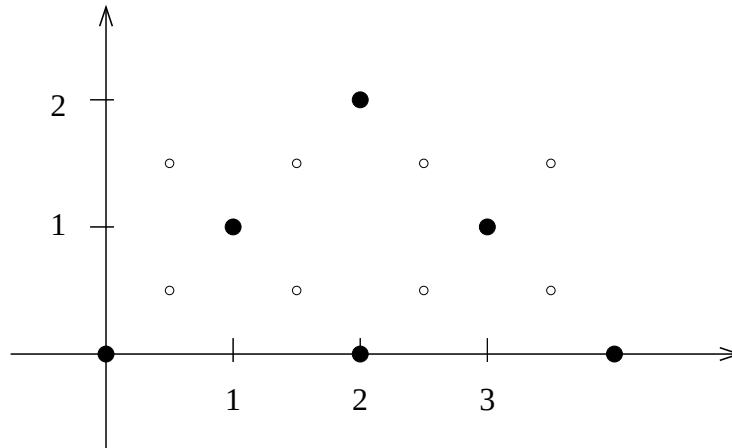


Abbildung 1: Sechs Kunden (fette Punkte) sind zu beliefern. Wie wählt man den Standort eines Depots?

Gesucht wird für verschiedene zu minimierende “Zielfunktionen” jeweils ein optimaler Standort $z \in \mathbb{R}^2$; konkret betrachten wir die folgenden Funktionen:

(a) $D_1(z) = \sum_{i=1}^6 (L_1(z, p_i));$

(b) $D_2(z) = \sum_{i=1}^6 (L_2(z, p_i))^2;$

(c) $D_3(z) = \sum_{i=1}^6 (L_2(z, p_i)).$

Skizzieren Sie jeweils die erste Ableitung als Funktion von z , indem Sie den negativen Gradienten für die “dünnen” Punkte $(i/2, j/2)$, $i \in \{1, 3, 5, 7\}$, $j \in \{1, 3\}$ und $(2, 1)$ einzeichnen. (Verwenden Sie dabei einen geeigneten Maßstab für die eingezeichneten Größen!)

Bestimmen Sie für alle drei Zielfunktionen sämtliche Optimallösungen.

Aufgabe 3 (Standortoptimierung II – jetzt mit Integralen!):

Oft kann man sich bei der Wahl eines Standortes gar nicht von vornherein auf eine endliche Menge von anzulaufenden Punkten beschränken (etwa weil es sehr viele sind, oder weil sie sich erst zufällig ergeben). Dann hat man eher eine Situation wie in Abbildung 2, bei dem die Nachfrage über das gesamte grau schraffierte Dreieck Δ gleichmäßig verteilt ist.

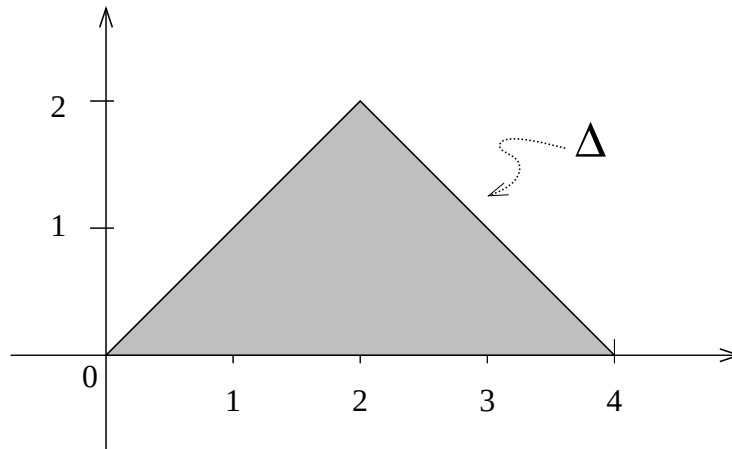


Abbildung 2: Wie wählt man den Standort eines Depots für diese kontinuierliche Nachfrageverteilung?

Formulieren Sie die drei Optimierungsprobleme, die sich jeweils ergeben, wenn man den durchschnittlichen Wert der Funktion

- (a) $f_1(z) = (L_1(z, p_i))$, $z \in \Delta$;
- (b) $f_2(z) = (L_2(z, p_i))^2$, $z \in \Delta$;
- (c) $f_3(z) = (L_2(z, p_i))$, $z \in \Delta$

minimieren will.

Bestimmen Sie die Zielfunktionswerte für die Stellen $z \in \{(2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$!

Aufgabe 4 (Standortoptimierung III – Praktische Analysis):

Bestimmen Sie für die Zielfunktionen f_1 und f_2 den optimalen Standort im Dreieck Δ !

Aufgabe 5 (Standortoptimierung IV – eine Doktorarbeit):

Überlegen Sie sich, wie man wohl folgendes Problem ganz allgemein angehen könnte:

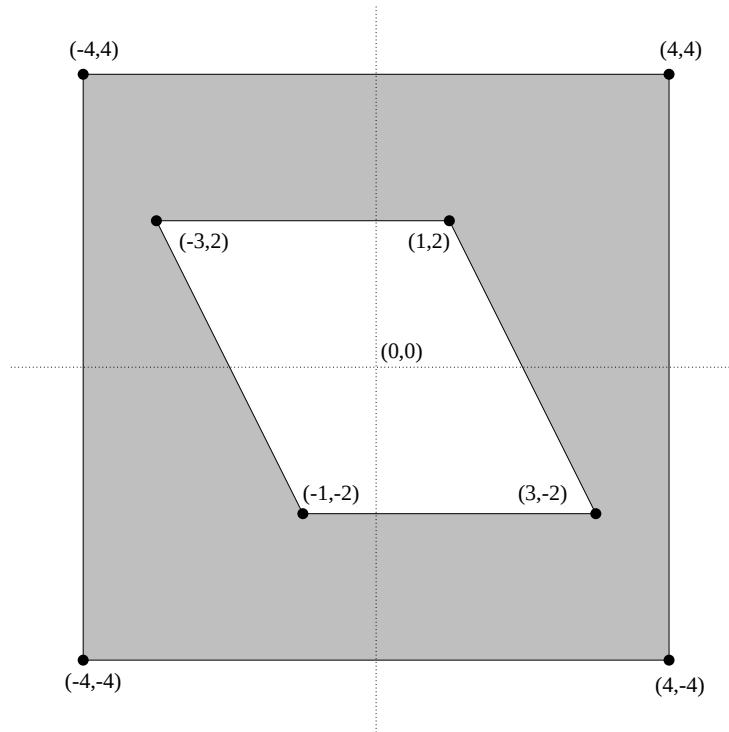


Abbildung 3: Wie wählt man den Standort eines Depots für diese kontinuierliche Nachfrageverteilung?

Gegeben ist ein (zusammenhängendes, kompaktes) Gebiet $P \subset \mathbb{R}^2$. Gesucht wird ein optimaler Standort, der den durchschnittlichen Manhattan-Abstand minimiert. (Ein weiteres Beispiel findet sich in Abbildung 3.) Folgende Aspekte spielen dabei eine Rolle:

- (Erlaubte Wege) Entweder sind beliebige Wege zum Kunden erlaubt; oder diese Wege müssen vollständig innerhalb von P verlaufen.
- (Hindernisse) Das Gebiet kann im Inneren Hindernisse aufweisen – oder auch nicht. (Ein Hindernis ist ein “Loch” im Inneren; “keine Hindernisse im Inneren” heißt also, dass es keine solchen Löcher gibt, das Gebiet also einfach zusammenhängend ist.)
- (Algorithmik) Gesucht ist nicht nur eine spezielle Lösung für ein spezielles Problem, sondern ein systematisches Verfahren, das sich auch z.B. programmieren lässt.
- (Laufzeit) Wie lange läuft ein solches Verfahren? (Nehmen wir an, dass P durch n gerade Strecken begrenzt ist, d.h. ein *Polygon* ist.)

Die genaue Lösung für das Beispiel in Abbildung 3 ist für Wege in P verblüffend schwer; aber es reichen wirklich ein paar Grundideen aus der Analysis!