

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zur Klausur

Aufgabe 1.

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{f}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} p(x_1, x_2) \\ q(x_1, x_2) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^{x_1+x_2}(\cos x_1 - \sin x_1) \\ e^{x_1+x_2} \cos x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie: Die Rotation von $\vec{f}$ verschwindet für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- (b) Folgern Sie aus (a): Ist B ein endliches sternförmiges Gebiet mit zusammenhängendem Rand ∂B , so verschwindet das Wegintegral $\int_{\partial B} \vec{f} \cdot d\vec{x}$.
- (c) Folgern Sie aus (a): Es gibt eine Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla F = \vec{f}$.
- (d) Bestimmen Sie eine Gleichung, die sämtliche Lösungen der Differentialgleichung

$$e^{x+y}(\cos x - \sin x) + (e^{x+y} \cos x + 2y)y' = 0, \quad y(0) = 0$$

charakterisiert.

- (e) Geben Sie eine Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an, die $\nabla F = \vec{f}$ und $F(0, 0) = 1$ erfüllt.
- (f) Überprüfen Sie, ob die Funktion $h(z) = p(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) + iq(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ in den Punkten $z = 0$ oder $z = \pi/2 - i\pi/2$ komplex differenzierbar ist.

Hinweis: Die Teile (d) und (f) kann man auch dann beantworten, wenn man bei anderen Teilen nicht weiterkommt!

Lösung 1.

- (a) Die Rotation erhält man im $\mathbb{R}^2$ durch

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \frac{\partial q}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_2} \implies \operatorname{rot} \vec{f}(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}(\cos x_1 - \sin x_1) - e^{x_1+x_2}(\cos x_1 - \sin x_1) = 0.$$

- (b) Die Behauptung folgt sofort mit dem Satz von GREEN, denn unter den genannten Voraussetzungen an B gilt

$$\oint_{\partial B} \vec{f} \cdot d\vec{x} = \iint_B \operatorname{rot} \vec{f} d(x_1, x_2)$$

und mit (a) folgt die Behauptung, da $\vec{f}$ eine C^1 -Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist (es gilt sogar $\vec{f} \in C^\infty$).

- (c) Das Vektorfeld $\vec{f}$ ist rotationsfrei nach Teil (a). Zudem ist $\vec{f} \in C^1$, daher ist $\vec{f}$ auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet ein Gradientenfeld, insbesondere auf $\mathbb{R}^2$ selbst.

- (d,e) Setzt man $x_1 := x$ und $x_2 := y$, so erhält man die Differentialgleichung $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$. Der Zusammenhang zum Potential F besteht gerade in den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = p$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = q$. Lösungen der Differentialgleichung werden demnach durch $F(x, y) = c \in \mathbb{R}$ beschrieben. Denn ist $y(x)$ eine Lösung, so gilt

$$0 = \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = p + qy'$$

(vgl. Ausführungen in der Vorlesung). Eine solche Funktion kann nun auf übliche Weise durch Lösen der Differentialgleichung gefunden werden. Aus Teil (a) liest man die Exaktheit der Differentialgleichung ab. Somit erhält man

$$F(x, y) = \int p(x, y) dx = \int e^{x+y}(\cos x - \sin x) dx = e^{x+y} \cos x + \varphi(y)$$

mit einer nur von y abhängenden Funktion φ . Aus $\frac{\partial F}{\partial y} = q$ folgt weiter

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} \cos x + \frac{d\varphi}{dy}(y) = q(x, y) = e^{x+y} \cos x + 2y \rightsquigarrow \varphi(y) = y^2$$

und damit schließlich die allgemeine implizite Lösung

$$F(x, y) = e^{x+y} \cos x + 2y = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Bedingung $F(0, 0) = 1$ liefert $c = 0$, also

$$F(x, y) = e^{x+y} \cos x + y^2.$$

Diese Gleichung ist weder nach $y(x)$ noch nach $x(y)$ auflösbar.

- (f) Die Funktionen p und q sind sicher differenzierbar. Es müssen also die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

erfüllt werden. Letztere kann wegen (a) nur erfüllt werden, falls die partiellen Ableitungen verschwinden. Dann muß aber $\cos x = \sin x$ gelten. Dies ist weder für $z = 0$ ($x = y = 0$) noch für $z = \pi/2 - i\pi/2$ ($x = \pi/2$, $y = -\pi/2$) erfüllt. Die Funktion ist demnach in keinem der Punkte komplex differenzierbar.

Aufgabe 2.

Sei $K := [0, 1] \times [0, 1]$ und $F \subseteq \mathbb{R}^3$ die Fläche mit der Parametrisierung

$$\vec{\Phi} : K \rightarrow F, \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei

$$\vec{f} : F \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld auf der Fläche F .

Berechnen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl das Wegintegral $\int_{\partial F} \vec{f} \cdot d\vec{x}$.

(Vergessen Sie nicht, vor dem Losrechnen zu erläutern, was Sie tun und warum!)

Lösung 2.

Man kann das Wegintegral mit dem Satz von STOKES in ein Oberflächenintegral umwandeln:

$$\oint_{\partial F} \vec{f} \cdot d\vec{x} = \iint_F \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma}$$

Die Rotation der gegebenen Funktion ist

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also konstant auf ganz $\mathbb{R}^3$. Daher bietet sich die Verwendung des Satzes von STOKES tatsächlich an. Für den Normalenvektor erhält man

$$\vec{\sigma}(u, v) = \left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \right)(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\iint_F \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_K \operatorname{rot} \vec{f}(\vec{\Phi}(u, v)) \cdot \vec{\sigma}(u, v) d(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 -4u du dv = -2.$$

Man kann das Wegintegral aber selbstverständlich auch zu Fuß berechnen. Dazu benötigt man eine Parametrisierung des Weges γ entlang ∂K . Zweckmäßig wird dieser in die vier Kanten des Quadrats zerlegt, also

$$\begin{aligned} \gamma_1: \quad \vec{c}_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, & \quad \gamma_2: \quad \vec{c}_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \gamma_3: \quad \vec{c}_3: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \end{pmatrix}, & \quad \gamma_4: \quad \vec{c}_4: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Den Weg entlang ∂F erhält man nun durch die Komposition $\vec{\Phi} \circ \gamma$. Dieser ist ebenfalls in vier Teilwege unterteilt und die Parametrisierungen lauten

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} \circ \gamma_1: \quad \vec{\Phi} \circ \vec{c}_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, & \quad \vec{\Phi} \circ \gamma_2: \quad \vec{\Phi} \circ \vec{c}_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}, \\ \vec{\Phi} \circ \gamma_3: \quad \vec{\Phi} \circ \vec{c}_3: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix}, & \quad \vec{\Phi} \circ \gamma_4: \quad \vec{\Phi} \circ \vec{c}_4: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Tangentialvektoren an die Wege $\vec{\Phi} \circ \gamma_k$ werden noch benötigt:

$$\frac{d(\vec{\Phi} \circ \vec{c}_1)}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \frac{d(\vec{\Phi} \circ \vec{c}_2)}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \frac{d(\vec{\Phi} \circ \vec{c}_3)}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2(1-t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d(\vec{\Phi} \circ \vec{c}_4)}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind alle Zutaten beisammen:

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} \vec{f} \cdot d\vec{x} &= \int_{\vec{\Phi} \circ \gamma} \vec{f} \cdot d\vec{x} = \sum_{k=1}^4 \int_{\vec{\Phi} \circ \gamma_k} \vec{f} \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \sum_{k=1}^4 \left\langle \vec{f} \circ \vec{\Phi} \circ \vec{c}_k, \frac{d(\vec{\Phi} \circ \vec{c}_k)}{dt} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2(1-t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] dt \\ &= \int_0^1 (2t - 3) dt = -2. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \pi - |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

- Geben Sie an, wie man die FOURIER-Koeffizienten für f berechnet.
- Führen Sie die in (a) aufgestellte Berechnung explizit durch und bestimmen Sie damit die FOURIER-Reihe.
- Lesen Sie aus dem Endergebnis von (b) die FOURIER-Reihe von $h(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ ab.

Lösung 3.

- Die FOURIER-Koeffizienten berechnet man mit den EULER-FOURIER-Formeln

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Für gerade Funktionen verschwinden die „ungeraden“ Koeffizienten b_n , $n \in \mathbb{N}$, was für die Funktion f hier ausgenutzt werden kann. Desweiteren ist der Integrand $f(x) \cos(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gerade, so daß man weiter umformen kann

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx.$$

Damit hat man sich des lästigen Betrags entledigt.

(b) Wie bereits unter (a) angedeutet, verschwinden die b_n . Für die übrigen Koeffizienten berechnet man

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \pi$$

sowie für $n \neq 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \cos(nx) dx = 2 \int_0^\pi \cos(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx \\ &= \underbrace{\frac{2}{n} \sin(nx) \Big|_0^\pi}_{=0} - \underbrace{\frac{2}{n\pi} x \sin(nx) \Big|_0^\pi}_{=0} + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{n^2\pi} \cos(nx) \Big|_0^\pi = -\frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die FOURIER-Reihe lautet also

$$(3.1) \quad \pi - |x| \quad \sim \quad \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

(c) Man kann die Betragsfunktion mit der Funktion f durch

$$|x| = \pi - f(x)$$

darstellen. Um nun die FOURIER-Reihe von f in diese Gleichung einsetzen zu dürfen und damit auf die FOURIER-Reihe von $|x|$ zu schließen, muß die Gleichung für jedes x richtig sein, das heißt die Reihe (3.1) muß punktweise konvergieren. f ist eine stetige Funktion, wegen $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ sogar beim Periodenübergang. Da FOURIER-Reihen zumindest an allen Stetigkeitspunkten konvergieren, tut sie dies in diesem Falle für das ganze Intervall $[-\pi, \pi]$. Daher darf die obige Gleichung punktweise betrachtet werden, und man erhält die bereits aus der Vorlesung und Übung bekannte FOURIER-Reihe

$$|x| \quad \sim \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

Man kann auch anschaulich argumentieren: Die Graphen der Funktionen $\pi - |x|$ und $|x|$ gehen jeweils durch Spiegelung an der Geraden $y = \pi/2$ hervor. Das ist gerade der Mittelwert beider Funktionen (also $a_0/2$). Daher erhält man die FOURIER-Koeffizienten a_n , $n \in \mathbb{N}$ der jeweils anderen Funktion durch Wechseln des Vorzeichens.

Eine dritte Möglichkeit, die Koeffizienten zu bestimmen, besteht in der Anwendung der Aufgabe 3, (b), Übung 9: Faßt man die Funktionen als 2π -periodisch auf, so entstehen sie durch Translation mit $\pm\pi$. Das führt ebenfalls auf den Vorzeichenwechsel der Koeffizienten a_n , $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4.

(a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' = \frac{1}{1-x}y - x + x^2, \quad y(0) = 3.$$

(b) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = 0.$$

(Dabei ist $y^{(k)}$ die k -te Ableitung von y .)

Lösung 4.

(a) Zunächst wird die homogene Differentialgleichung

$$y'_h = \frac{1}{1-x}y_h$$

betrachtet. Ihre Lösung läßt sich sofort hinschreiben:

$$y_h(x) = C \exp \int \frac{1}{1-x} dx = C \exp \ln|1-x| = C|x-1|, \quad C \in \mathbb{R}$$

An dieser Stelle kann man sich des Betrags entledigen: Betrachtet man die ursprüngliche Differentialgleichung, so sieht man, daß $x = 1$ ausgeschlossen werden muß. Lösungen werden demnach entweder auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ oder auf $(1, \infty)$ gültig sein (falls keine weiteren Restriktionen hinzukommen). Die Anfangsbedingung arbeitet auf dem Intervall $x < 1$, daher kann dies ab sofort zur Lösung des Anfangswertproblems angenommen werden. Damit ist also die relevante Lösung

$$y_h(x) = C(1-x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aber viele Wege führen nach Rom: Man kann auch argumentieren, daß mit der Konstanten C sowieso beide Möglichkeiten erhalten bleiben, also $C(1-x) = -C(x-1)$.

Nun muß eine partikuläre Lösung gefunden werden. Um Integrationskonstanten braucht man sich dabei keine Sorgen zu machen, da es ausreicht, irgendeine Lösung zu bestimmen. Der Weg dorthin führt über die Variation der Konstanten. C wird als Funktion $C(x)$ aufgefaßt und $y_p(x) = C(x)(1-x)$ in die ursprüngliche Differentialgleichung eingesetzt. Man erhält damit

$$C'(x)(1-x) - C(x) = C(x) \frac{1-x}{x-1} - x + x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad C'(x) = -x \quad \rightsquigarrow \quad C(x) = -\frac{1}{2}x^2.$$

Die gefundene partikuläre Lösung lautet also

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2(1-x)$$

und die Gesamtlösung ist damit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C(1-x) - \frac{1}{2}x^2(1-x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = 3$ liefert $C = 3$ und damit schließlich die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = 3 - 3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

- (b) Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung höherer (genauer fünfter) Ordnung. Der bekannte Ansatz $y(x) = Ce^{\lambda x}$, der natürlich nicht explizit ausgeführt werden muß, führt auf das Polynom

$$\lambda^5 - \lambda^4 - \lambda + 1 = 0.$$

Wie man leicht nachprüft, ist $\lambda_1 = 1$ eine Nullstelle. Damit erhält man

$$0 = (\lambda - 1)(\lambda^4 - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i),$$

woran man direkt die Nullstellen und ihre Vielfachheiten ablesen kann. Die Lösung lautet damit

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 \cos x + C_5 \sin x, \quad C_1, \dots, C_5 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5.

- (a) Sei

$$a_j := \begin{cases} 0 & \text{für } j \text{ ungerade,} \\ (-1)^{j/2} & \text{für } j \text{ gerade.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ konvergiert normal in der Kreisscheibe $B_1(0)$.

- (b) Geben Sie die Grenzfunktion an, gegen die die Reihe aus (a) konvergiert.

- (c) Benutzen Sie die Beziehungen $(\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2}$ und $\arctan(0) = 0$, um eine Reihenentwicklung der Funktion $\arctan z$ anzugeben. Wie lautet der Konvergenzradius?

Lösung 5.

- (a) Zunächst wird die normale Konvergenz ganz formal durch Nachweisen der definierenden Eigenschaft gezeigt. In Teil (b) fällt sie ganz nebenbei mit ab. Daher ist dieser Teil eigentlich nicht nötig.

Eine Funktionenreihe $\sum f_n$ ist genau dann auf einem offenen Bereich $D \subset \mathbb{C}$ normal konvergent, wenn es zu jedem Punkt $z \in D$ eine Umgebung $U \subset D$ gibt, für die gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\zeta \in U} |f_n(\zeta)| < \infty.$$

Übersetzt auf diesen Fall bedeutet das folgendes: Der Bereich D ist der offene Einheitskreis um den Ursprung $B_1(0)$. Die Funktionenfolge ist gegeben durch

$$f_n = (-1)^n z^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

da nur die geraden Terme nicht verschwinden. Sei nun $z \in D$ gegeben. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon + |z| < 1$, da ja $|z| < 1$ gilt. Dann ist $U := B_\varepsilon(z)$ eine Umgebung von z , die ganz in D liegt. Für jedes $\zeta \in U$ gilt insbesondere $|\zeta| < |z| + \varepsilon$ und damit folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\zeta \in U} |(-1)^n \zeta^{2n}| = \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\zeta \in U} |\zeta|^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (|z| + \varepsilon)^{2n} < \infty.$$

Dieser recht allgemein gehaltene Beweis nutzt gar nicht aus, daß wir es hier mit einer Potenzreihe zu tun haben. Man kann aber auch den folgenden, auf dem Lemma von ABEL basierenden Satz verwenden:

Setzt man

$$R := \sup\{t \geq 0 \mid |a_\nu| t^\nu \text{ für alle } \nu \in \mathbb{N} \text{ beschränkt}\},$$

so ist die Potenzreihe $\sum a_\nu z^\nu$ auf der offenen Kreisscheibe $B_R(0)$ normal konvergent, außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe, also auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)}$, dagegen divergent.

(Es ist daher sinnvoll, den Wert R als Konvergenzradius zu bezeichnen, begrifflich sogar sinngemäßer als im Reellen.) Offenbar gilt hier $|a_\nu| \leq 1$, womit sich die Bedingung der Beschränktheit von $|a_\nu| t^\nu$ allein durch die Einschränkung des Wertebereichs auf $t < 1$ erfüllen läßt. Das Supremum (und damit der Konvergenzradius) ist also $R = 1$ und die Potenzreihe ist nach dem Satz auf $B_1(0)$ normal konvergent.

- (b) Jetzt darf man Teil (a) wieder getrost vergessen, denn das obige Ergebnis erhält man auf wundersame Weise automatisch: Durch Umformung erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \frac{1}{1+z^2}$$

als Grenzfunktion, denn die zweite Summe ist eine geometrische Reihe, die wegen $|z| < 1$ wie angegeben auf $B_1(0)$ konvergiert. Damit ist aber auch die Potenzreihe normal konvergent auf $B_1(0)$, was eine wesentlich elegantere Lösungsmöglichkeit für Teil (a) darstellt.

- (c) Mit dem Ergebnis aus Teil (b) erhält man nun sehr schnell

$$\arctan z = \int_0^z (\arctan \zeta)' d\zeta = \int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^{2n} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

für $z \in B_1(0)$, denn bei normal konvergenten Potenzreihen darf man gliedweise integrieren. Der Konvergenzradius bleibt beim Integrieren und Differenzieren derselbe, demnach „erbt“ diese Reihe den Konvergenzradius 1 von der geometrischen Reihe.