

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zu Blatt 12

Aufgabe 1. (Komplexe Integrale längs geschlossener Wege)

Es sei $B := B_r(c)$ eine Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ um ein $c \in \mathbb{C}$.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung

$$\zeta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \zeta(t)$$

des Randes der Kreisscheibe ∂B (in positiver Orientierung) an.

(b) Es sei $z \in \mathbb{Z}$. Verwenden Sie die Parametrisierung ζ aus Teil (a), um

$$\int_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta = \begin{cases} 2\pi i, & \text{falls } n = -1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

zu zeigen.

Lösung 1.

(a) Die Abbildung $t \mapsto re^{it}$ liefert eine Parametrisierung des Kreises um den Ursprung mit Radius r . Die gesuchte Parametrisierung erhält man durch Verschieben des Kreises, das heißt durch Addition mit c . Sie lautet also

$$(1.1) \quad \zeta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \zeta(t) = c + re^{it}.$$

(b) Unter Verwendung von (1.1) erhält man

$$\int_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta = \int_0^{2\pi} (\zeta(t) - c)^n \frac{d\zeta}{dt}(t) dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{int} e^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Für $n = -1$ erhält man sofort das Ergebnis. Ist $n \neq -1$, so folgt

$$ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \frac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1} (e^{i(n+1)2\pi} - 1) = 0,$$

wegen $\exp(2k\pi i) = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. (Integration entlang eines Rechtecks)

Betrachten Sie das Rechteck

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < r, |\operatorname{Im} z| < s\}, \quad r, s > 0.$$

(a) Geben Sie eine Parametrisierung ζ des Weges entlang ∂R an.

(Hinweis: Zerlegen Sie den Weg in die vier Teilwege entlang der Kanten des Rechtecks und parametrisieren Sie diese getrennt. Achten Sie auf die Orientierung.)

(b) Berechnen Sie damit das Integral

$$\int_{\partial R} \zeta^{-1} d\zeta.$$

Lösung 2.

(a) Die Eckpunkte des Rechtecks lauten (Reihenfolge im mathematisch positiven Sinn)

$$z_0 = -r - is, \quad z_1 = r - is, \quad z_2 = r + is \quad \text{und} \quad z_3 = -r + is.$$

Damit erhält man die vier Teilwege und Parametrisierungen

$$\gamma_k = \overline{z_k z_{k+1}} \quad \longleftrightarrow \quad \zeta_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \zeta_k(t) = z_k + t(z_{k+1} - z_k), \quad k \in \mathbb{Z}_4.$$

(Die Bedingung $k \in \mathbb{Z}_4$ ist lediglich ein mathematischer „Trick“, der dafür sorgt, daß für $k = 3$ der Weg $\gamma_3 = \overline{z_3 z_0}$ benutzt wird; das folgt aus $3 + 1 = 0$ in $\mathbb{Z}_4$.) Wegen $z_2 = -z_0$ und $z_3 = -z_1$ lauten die Parametrisierungen im Einzelnen

$$(2.1) \quad \zeta_0(t) = -\zeta_2(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) \quad \text{und} \quad \zeta_1(t) = -\zeta_3(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = z_1 - t(z_0 + z_1).$$

(b) Aus (2.1) folgt natürlich auch

$$\frac{d\zeta_0}{dt} = -\frac{d\zeta_2}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta_1}{dt} = -\frac{d\zeta_3}{dt}$$

und damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} \zeta^{-1} d\zeta &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_4} \int_0^1 \frac{1}{\zeta_k(t)} \frac{d\zeta_k}{dt}(t) dt = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{\zeta_0(t)} \frac{d\zeta_0}{dt}(t) + \frac{1}{\zeta_1(t)} \frac{d\zeta_1}{dt}(t) \right) dt \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{z_1 - z_0}{z_0 + t(z_1 - z_0)} + \frac{-(z_0 + z_1)}{z_1 - t(z_0 + z_1)} \right) dt. \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion der beiden Brüche ist ein Logarithmus des jeweiligen Nenners. Da Integrationskonstanten bei bestimmter Integration verschwinden, können die Hauptzweige $\log = \log_0$ verwendet werden. Damit folgt weiter

$$\int_{\partial R} \zeta^{-1} d\zeta = 2 \left[\log(z_0 + t(z_1 - z_0)) + \log(z_1 - t(z_0 + z_1)) \right] \Big|_0^1 = 2 \left(\log \frac{z_1}{z_0} + \log \frac{-z_0}{z_1} \right) = 2 \log(-1) = 2\pi i.$$

Aufgabe 3. (Eindeutigkeit mit der CAUCHYschen Integralformel)

Die Funktionswerte holomorpher Funktionen sind auf wundersame Weise miteinander verknüpft. So benötigt man von solchen Funktionen nur die Werte auf dem Rand einer Kreisscheibe, um ihren Verlauf auf der gesamten Kreisscheibe zu kennen, wie die CAUCHYsche Integralformel verrät. Eine Konsequenz dieser Eindeutigkeit zeigt das folgende Beispiel.

Es seien f und g auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B = \overline{B}_r(c)$ mit $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ holomorphe, stetig differenzierbare Funktionen und $\alpha \in \partial \mathbb{E}$.

Zeigen Sie: Gilt $f(\zeta) = g(\alpha(\zeta - c) + c)$ für alle $\zeta \in \partial B$, so folgt $f(z) = g(\alpha(z - c) + c)$ für alle $z \in B$.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Gültigkeit der Aussage für $c = 0$ und argumentieren Sie dann in kurzen Worten, warum sie auch für $c \neq 0$ bestehen bleibt.)

Lösung 3.

Zunächst sei $c = 0$. Es gilt $|\alpha| = 1$ und daher $|\alpha z| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, insbesondere also $\alpha \zeta \in \partial B$ für $\zeta \in \partial B$. Der Rand ∂B der Kreisscheibe bleibt unter der Multiplikation mit α invariant, das heißt es gilt $\alpha \cdot \partial B = \partial B$. Mit der CAUCHYschen Integralformel folgt damit

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{g(\alpha \zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha \cdot \partial B} \frac{\alpha^{-1} g(\eta)}{\alpha^{-1} \eta - z} d\eta && \text{(Substitution } \eta = \alpha \zeta, d\zeta = \alpha^{-1} d\eta) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{g(\eta)}{\eta - \alpha z} d\eta = g(\alpha z) && \text{(Benutzen von } \alpha \cdot \partial B = \partial B) \end{aligned}$$

für alle $z \in B$. Nun sei $c \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist $\partial B - c$ wiederum der Rand der Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius r . Die obigen Ausführungen gelten entsprechend und die abschließende Addition mit c verschiebt alles zurück auf die Kreisscheibe mit Mittelpunkt c .

Aufgabe 4. (Mittelwertungleichung)

Es sei $B := B_r(c)$ die Kreisscheibe um $c \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$ und f eine auf B holomorphe, stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

(a)

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (c + re^{i\phi}) d\phi.$$

(Tip: Verwenden Sie eine geeignete Parametrisierung von ∂B und wenden Sie die CAUCHYsche Integralformel an.)

(b) Es gilt die Mittelwertungleichung

$$|f(c)| \leq \sup_{z \in \partial B} |f(z)|.$$

Lösung 4.

(a) Für die Parametrisierung des Randes ∂B der Kreisscheibe kann (1.1) verwendet werden. Mit der CAUCHYschen Integralformel erhält man dann

$$(4.1) \quad f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta(t))}{\zeta(t) - c} \frac{d\zeta}{dt}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{it}) dt.$$

(b) Mit der Standardabschätzung

$$\left| \int f dz \right| \leq \int |f| dz$$

und (4.1) folgt

$$|f(c)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(c + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + re^{it})| dt \leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(c + re^{it})| = \sup_{z \in \partial B} |f(z)|.$$

Aufgabe 5. (POISSONSche Integrale – Knobel-Zusatzaufgabe)

Es sei $B := B_R(0)$ die Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius R und $f = u + iv$ eine auf B holomorphe (und stetig differenzierbare) Funktion. Zeigen Sie: Für jedes $z \in B$, also für alle $z = re^{i\phi}$ mit $0 \leq r < R$, gelten die POISSONSchen Integraldarstellungen von u und v

$$u(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \phi) + r^2} dt,$$
$$v(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \phi) + r^2} dt.$$

(Tip: Der Punkt $w := \frac{R^2}{r}e^{i\phi}$ liegt nicht in B . Zeigen Sie damit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = 0, \quad \text{also} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) d\zeta.$$

Verwenden Sie dann die Polarkoordinatendarstellung von ζ, z, w , um das obige Ergebnis zu erhalten.)

Lösung 5.

Ausnahmsweise die Lösung der Knobel-Zusatzaufgabe:

Da der Punkt $w = \frac{R^2}{r}e^{i\phi}$ nicht in B liegt, ist mit f auch die Funktion $f(z)/(z - w)$ holomorph auf B . Daher gilt

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ , der in B liegt, insbesondere für $\gamma = \partial B$. Mit der CAUCHYschen Integralformel folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) d\zeta.$$

Setzt man nun die Parametrisierung $\zeta(t) = Re^{it}$ sowie die Polarkoordinatendarstellungen $z = re^{i\phi}$ und $w = \frac{R^2}{r}e^{i\phi}$ ein, erhält man

$$\begin{aligned}
 f(re^{i\phi}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \left(\frac{1}{Re^{it} - re^{i\phi}} - \frac{1}{Re^{it} - R^2/re^{i\phi}} \right) Re^{it} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{e^{it} - R/re^{i\phi} - e^{it} + r/Re^{i\phi}}{(e^{it} - r/Re^{i\phi})(e^{it} - R/re^{i\phi})} Re^{it} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{(r^2 - R^2)e^{i(t+\phi)}}{r(e^{i2t} + e^{i2\phi} - (r/R + R/r)e^{i(t+\phi)})} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{r^2 - R^2}{Rre^{i(t-\phi)} + Rre^{-i(t-\phi)} - (r^2 + R^2)} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \phi) + r^2} dt
 \end{aligned}$$

unter Benutzung der EULERSchen Formel in der Identität

$$Rre^{i(t-\phi)} + Rre^{-i(t-\phi)} = Rr(\cos(t - \phi) - i \sin(t - \phi) + \cos(\phi - t) - i \sin(\phi - t)) = 2Rr \cos(t - \phi).$$

Auflösen mit $f = u + iv$ liefert das gewünschte Ergebnis.