

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zu Blatt 11

Aufgabe 1. (Lokal-konstante holomorphe Funktionen)

Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ein offener Bereich und $f = u + iv$ eine Funktion, die in D holomorph ist. Zeigen Sie:

- (a) Nimmt f nur reelle oder rein imaginäre Werte an, gilt also $u = 0$ oder $v = 0$, so muß f auf D lokal-konstant sein.
- (b) Ist für alle $z \in D$ die Bedingung $|f(z)| = 1$ erfüllt, so ist f lokal-konstant auf D .

Lösung 1.

Da f auf D holomorph ist, gelten für alle $z \in D$ die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- (a) Sei nun $u = 0$, so gilt zumindest für $z \in D$ offenbar auch $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Dann verschwinden aber wegen (1.1) auch die partiellen Ableitungen von v in D , also ist f lokal-konstant. Der Fall $v = 0$ liefert dasselbe Ergebnis.

- (b) Aus $1 = |f| = u^2 + v^2$ und (1.1) folgt

$$(1.2) \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2) = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \frac{\partial u}{\partial x} - 2v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &\iff u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

sowie

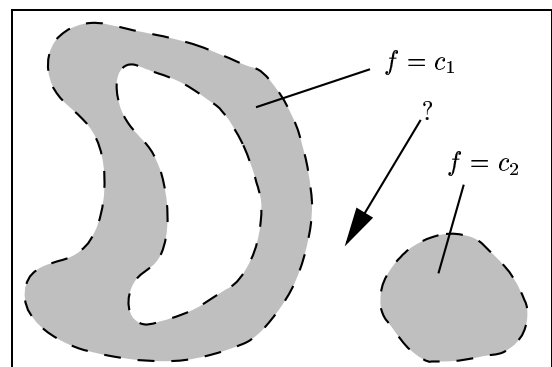
$$(1.3) \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y}(u^2 + v^2) = 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial u}{\partial x} \\ &\iff u \frac{\partial u}{\partial y} = -v \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(u^2 + v^2) = \frac{\partial u}{\partial x}u^2 + \frac{\partial u}{\partial x}v^2 \stackrel{(1.3)}{=} \frac{\partial u}{\partial x}u^2 - \frac{\partial u}{\partial y}uv = u \left(\frac{\partial u}{\partial x}u - \frac{\partial u}{\partial y}v \right) \stackrel{(1.2)}{=} 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}(u^2 + v^2) = \frac{\partial u}{\partial y}u^2 + \frac{\partial u}{\partial y}v^2 \stackrel{(1.2)}{=} \frac{\partial u}{\partial y}u^2 + \frac{\partial u}{\partial x}uv = u \left(\frac{\partial u}{\partial y}u + \frac{\partial u}{\partial x}v \right) \stackrel{(1.3)}{=} 0. \end{aligned}$$

Wegen (1.1) verschwinden dann die partiellen Ableitungen von v ebenfalls auf D . Also ist f lokal-konstant.

Man kann ohne weitere Voraussetzungen nicht sagen, ob f auf D konstant ist: Handelt es sich bei D etwa um einen nicht zusammenhängenden Bereich, so kann die Funktion in jeder der Zusammenhangskomponenten von D verschiedene Werte annehmen. Auf jeder dieser Zusammenhangskomponenten muß sie dagegen konstant, eben lokal-konstant sein.



Aufgabe 2. (Einheitswurzeln)

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ lässt sich eindeutig in Polarkoordinaten $z = re^{i\phi}$, $r = |z| > 0$, $\phi \in (-\pi, \pi]$ darstellen.

(a) Zeigen Sie, daß die komplexe Exponentialfunktion $i2\pi$ -periodisch ist, das heißt es gilt $e^z = e^{z+i2\pi}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $\zeta_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, ?$ der Gleichung $\zeta^n = 1$. Wieviele sind es und warum sind das alle Lösungen?

(Tip: Verwenden Sie für ζ die Darstellung in Polarkoordinaten.)

(c) Es sei $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = a$.

(d) Es sei ζ eine n -te Einheitswurzel. Zeigen Sie

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{n-1} = \begin{cases} n & \text{falls } \zeta = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Tip: Auch für komplexes $q \neq 1$ gilt die geometrische Summenformel. Mit dieser Aufgabe kann man übrigens den Tipp der Aufgabe 3,(a) von Blatt 9 bestätigen.)

Lösung 2.

(a) Mit der EULER-Formel folgt für $z = x + iy$

$$e^{z+i2\pi} = e^{x+i(2\pi+y)} = e^x (\cos(2\pi + y) + i \sin(2\pi + y)) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^z.$$

(b) Setzt man etwa $\zeta = re^{i\phi}$ mit $r > 0$ und $\phi \in (-\pi, \pi]$, so erhält man

$$1 = r^n e^{in\phi} \iff r = 1 \quad \wedge \quad \phi = \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Das liefert n Nullstellen des Polynoms n -ten Grades $\zeta^n - 1 = 0$. Daher kann es keine weiteren Nullstellen geben. Die Einheitswurzeln lauten also

$$\zeta_k = \exp\left(i \frac{2\pi k}{n}\right), \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

(c) Sei $a = |a|e^{i\phi}$ und $z = re^{i\psi}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} z^n = r^n e^{in\psi} = |a|e^{i\phi} &\iff r = \sqrt[n]{|a|} \quad \wedge \quad \psi = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\} \\ &\iff z = \sqrt[n]{|a|} e^{i\phi/n} \zeta_k, \end{aligned}$$

wobei ζ_k wiederum eine der n -ten Einheitswurzeln aus Teil (b) ist.

(d) Die geometrische Summenformel für $q \neq 1$ lautet

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Der Fall $\zeta = 1$ ist trivial. Sei also $\zeta = \zeta_k$ mit $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Damit folgt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = \frac{1 - \zeta^n}{1 - \zeta} = \frac{1 - \exp(i \frac{2\pi n k}{n})}{1 - \exp(i \frac{2\pi k}{n})} = 0,$$

wegen

$$\exp\left(i \frac{2\pi n k}{n}\right) = \exp(i 2\pi k) \stackrel{(a)}{=} \exp 0 = 1.$$

Aufgabe 3. (RIEMANNsche ζ -Funktion)

Die Reihe

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

heißt RIEMANNsche ζ -Funktion. Zeigen Sie: Die Reihe ist in jeder Halbebene

$$H_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

gleichmäßig und in

$$H^* := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$$

normal konvergent.

(Tip: Zeigen Sie $|n^z| = n^{\operatorname{Re} z}$, indem Sie die Darstellung $n^z = \exp(z \log n)$ verwenden.)

Lösung 3.

Für $n > 0$ gilt mit $n^z = \exp(z \log n)$ und $z = x + iy$

$$|n^z| = |\exp(z \log n)| = |\exp((x + iy) \log n)| = \exp(x \log n) |\exp(iy \log n)| = n^x = n^{\operatorname{Re} z}.$$

Damit folgt für alle $z \in H_\varepsilon$

$$\frac{1}{|n^z|} = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^z|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Die rechte Reihe ist eine konvergente Majorante für alle $\varepsilon > 0$, demnach konvergiert $\zeta(z)$ gleichmäßig auf H_ε für alle $\varepsilon > 0$.

Desweiteren gibt es für jedes $z \in H^*$ eine Umgebung (nämlich ein H_ε mit genügend kleinem ε), in der die Reihe konvergiert, also ist sie normal konvergent in H^* .

Aufgabe 4. ($\mathbb{C}$ -Welt-Geschichten: Löwenfangen mit der CAYLEY-Abbildung)

Pohl Ohorm, der bekannteste Mathematiker in der $\mathbb{C}$ -Welt, war gerade Richtung Norden unterwegs, als ihm an der Hauptstraße angekommen Unmengen von Menschen entgegenliefen ...

„Wovor rennt ihr denn alle weg?“ – „Ein Löwe ist entlaufen!“ – „Ja, dann schnell, fangt ihn wieder ein!“ – „Das ist nicht so einfach: Er hält sich irgendwo nördlich der Hauptstraße auf; aber das Gebiet ist unendlich groß!“ – „Ach was, das ist einfach. Wir werden den Norden einzäunen.“ – „Einzäunen? Den ganzen Norden?“ – „Naja, wenn der Zaun nicht um das Gebiet paßt, vielleicht paßt ja das Gebiet in die Umzäunung?“ – „W ...“ – „Ach, ich zeig's dir.“

Pohl Ohorm legte seinen Mantel ab und überlegte kurz. Dann schlug er folgende Vorgehensweise vor:

Wenn man die Hauptstraße der $\mathbb{C}$ -Welt (die reelle Achse) auf den Rand des Marktplatzes (den Einheitskreis) abbildet und dafür sorgt, daß der Norden (die obere Halbebene) auf dem Marktplatz landet, so müßte der Löwe irgendwo auf dem Marktplatz zu finden sein. Der ist nicht besonders groß und der Löwe wäre leicht zu fangen.

Dazu machte er folgenden Ansatz: „Alles was wir brauchen ist eine Abbildung

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

die die Hauptstraße auf den Rand des Marktplatzes transformiert. Zum Beispiel könnte sie folgende Bedingungen erfüllen:

$$h(0) = -1, \quad h(1) = -i, \quad \lim_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ x \rightarrow \infty}} h(x) = 1.$$

Allerdings sollte sie holomorph sein, damit der Löwe nach der Transformation noch als solcher erkennbar ist.“

(a) Bestimmen Sie die Funktion h .

(b) Zeigen Sie, daß h auf $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ holomorph ist.

Nachdem auf diese Weise der Löwe gefangen war, suchte Pohl Ohorm verzweifelt seinen Mantel. „Ich glaube, den hattest du am Brunnen abgelegt!“ – So ein Pech! Der Brunnen lag vorher bei $-i$. Jetzt ist der Mantel im tiefen Dunkel der Unendlichkeit verschwunden. „Kein Problem“, meinte Pohl, „transformieren wir halt zurück!“

(c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion h^{-1} .

(d) Zeigen Sie, daß h^{-1} auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph ist.

„Ah, mein Mantel! Ein Hoch auf die biholomorphen Funk ... Heh! Da ist ja ein Loch drin. Moment, das ist gar kein Loch! Sieht so aus, als hätte sich der gesamte Horizont in diesem Fleck auf meinem Mantel manifestiert!“ – „Faszinierend! Und wie du das so schnell berechnet hast ...“ – „Nun ja“, den Schmutz von seinem Mantel klopfend, „ich muss zugeben, sowas habe ich schonmal gesehen: Die Abbildung h wird auch CAYLEY-Abbildung genannt.“ – „Cayley, hm? Klingt für mich wie ein Name aus einer fremden Welt ...“

Lösung 4.

(a) Aus den ersten beiden Bedingungen für h folgt

$$\frac{b}{d} = -1 \iff b = -d \quad \text{und} \quad \frac{a+b}{c+d} = -i \iff a+b = -i(c+d).$$

Die dritte Bedingung liefert

$$1 = \lim_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ x \rightarrow \infty}} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \iff a = c.$$

Damit erhält man

$$a+b = -i(a-b) \iff b(1-i) = -a(1+i) \iff b = -a \frac{1+i}{1-i} = -a \frac{(1+i)^2}{2} = -ia,$$

also insgesamt

$$h(z) = \frac{az - ia}{az + ia} = \frac{z - i}{z + i},$$

da $a = 0$ die dritte Bedingung nicht erfüllen würde.

(b) Die Funktion h kann an der Stelle $z = -i$ nicht holomorph sein, da sie dort nicht definiert ist. Einsetzen von $z = x + iy$ liefert die Zerlegung der Funktion in Real- und Imaginärteil:

$$h(x, y) = \frac{x + i(y-1)}{x + i(y+1)} = \frac{(x + i(y-1))(x - i(y+1))}{x^2 + (y+1)^2} = \underbrace{\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}}_{u(x, y)} + i \underbrace{\frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2}}_{v(x, y)}$$

Die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen werden von h für $z \neq -i$ erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{2x(x^2 + (y+1)^2) - (x^2 + y^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + (y+1)^2)^2} = \frac{2x(2y+2)}{(x^2 + (y+1)^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{2x \cdot 2(y+1)}{(x^2 + (y+1)^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{2y(x^2 + (y+1)^2) - (x^2 + y^2 - 1) \cdot 2(y+1)}{(x^2 + (y+1)^2)^2} = \frac{2y^2 + 4y - 2x^2 + 2}{(x^2 + (y+1)^2)^2} = \frac{2(y+1)^2 - 2x^2}{(x^2 + (y+1)^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{-2(x^2 + (y+1)^2) + 2x \cdot 2x}{(x^2 + (y+1)^2)^2} = \frac{2x^2 - 2(y+1)^2}{(x^2 + (y+1)^2)^2}$$

(c) Sei $w = h(z)$. Dann folgt

$$w = \frac{z - i}{z + i} \iff z = i \frac{1+w}{1-w} = h^{-1}(w).$$

(d) Anstatt direkt zu zeigen, daß h^{-1} holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ist, bedienen wir uns eines Tricks: Mit der Definition $g(w) := ih^{-1}(iw)$ erhält man

$$g(w) = \frac{-iw - 1}{-iw + 1} = \frac{w - i}{w + i} = h(w).$$

Da h auf $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ holomorph ist, folgt die Behauptung.