

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zu Blatt 10

Aufgabe 1. (Vollständige Orthonormalsysteme)

Zeigen Sie: Aus der Gültigkeit der PARSEVALschen Gleichung, also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, u_k \rangle^2 = \|f\|^2$$

für jedes Element $f \in L^2[-\pi, \pi]$, folgt die Vollständigkeit des Orthonormalsystems $(u_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Lösung 1.

Es sei $u \in L^2[-\pi, \pi]$ mit

$$(1.1) \quad \langle u, u_k \rangle = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann folgt aus der Gültigkeit der Gleichung von PARSEVAL

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \langle u, u_k \rangle^2 = \|u\|^2,$$

also $\|u\| = 0$. Daher muß u die Nullfunktion sein. Also ist die Nullfunktion das einzige Element aus $L^2[-\pi, \pi]$, welches (1.1) erfüllt. Damit ist das Orthonormalsystem $(u_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ vollständig.

(Anmerkung: Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß es sich bei den Elementen des L^2 nicht um Funktionen sondern um Funktionsklassen handelt. Dadurch wird der L^2 zu einem Banachraum (vollständiger normierter Raum) und die Äquivalenz $\|u\| = 0 \iff u = 0$ ist sinnvoll. Das Gleichheitszeichen bedeutet aber stets „fast überall“ und nicht punktweise Gleichheit.)

Aufgabe 2. (Verzweiflung der BERNOULLI-Brüder)

Die Brüder JAKOB und JOHANN BERNOULLI haben lange Zeit versucht, den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

zu bestimmen. Beide sind an ihr verzweifelt und erst LEONHARD EULER konnte das Geheimnis im Jahre 1734 lüften. JAKOB BERNOULLI war zu diesem Zeitpunkt lange verstorben, sein Bruder JOHANN jedoch erfuhr von dem Ergebnis und veröffentlichte es unter seinem Namen, ohne EULER zu erwähnen.

(a) Rächen Sie EULER: Verwenden Sie die FOURIER-Reihen der Funktionen x^2 bzw. $|x|$, um den Wert der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

zu bestimmen (benutzen Sie dafür aus der Vorlesung bzw. Übung gewonnene Erkenntnisse). Lösen Sie damit die obige Reihe.

(b) Lösen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} dx.$$

(Tip: Für $|x| < 1$ gilt die Potenzreihenentwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Integration und Summation dürfen vertauscht werden. Verwenden Sie eine der oben angegebenen Reihen.)

Lösung 2.

- (a) (i) FOURIER-Reihe von x^2 (vergleiche Vorlesung): Da es sich um eine gerade Funktion handelt, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \neq 0$ erhält man

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \underbrace{\frac{2}{n\pi} x^2 \sin(nx)}_{=0} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= \frac{4}{n^2\pi} x \cos(nx) \Big|_0^{\pi} - \underbrace{\frac{4}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx}_{=0} = (-1)^n \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

und für $n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Die FOURIER-Reihe lautet also

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

und durch Einsetzen von $x = 0$ erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

- (ii) FOURIER-Reihe von $|x|$ (vergleiche Vorlesung): Wiederum handelt es sich um eine gerade Funktion ($b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Die übrigen Koeffizienten lauten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \underbrace{\frac{2}{n\pi} x \sin(nx)}_{=0} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

für $n \neq 0$ bzw.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi.$$

Damit erhält man die FOURIER-Reihe

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$$

und durch Einsetzen von $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

- (iii) Bestimmung der Reihe: Durch Zerlegen der Reihe in gerade und ungerade Terme erhält man nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right) = 2 \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(b) Innerhalb der Integrationsgrenzen darf die Potenzreihe verwendet werden. Einsetzen derselben liefert

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{n+1} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

nach Aufgabenteil (a),(i).

Aufgabe 3. (Komplexe Differenzierbarkeit)

(a) Sei $f(z) := x^3 y^2 + i x^2 y^3$. Bestimmen Sie die Menge aller $c = (a, b) \in \mathbb{C}$, für die f komplex differenzierbar ist.

(b) Schreiben Sie $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) := z^3 + 7z^2 + 2z + 1$ als reelle Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und verifizieren Sie, daß die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen gelten.

Lösung 3.

(a) Es seien $u(x, y) = x^3 y^2$ und $v(x, y) = x^2 y^3$ (dann ist $f = u + iv$). Die Funktionen u und v sind offensichtlich stetig partiell differenzierbar. Es müssen also noch die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

erfüllt werden. Damit erhält man

$$\begin{aligned}3x^2 y^2 &= 3x^2 y^2 \quad (\text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ erfüllt}) \\ \wedge \quad 2x^3 y &= -2xy^3 \quad \iff \quad x = 0 \quad \vee \quad y = 0.\end{aligned}$$

Die Funktion f ist also auf der reellen und der imaginären Achse komplex differenzierbar.

(b) Einsetzen von $z = x + iy$ liefert

$$\begin{aligned}g(z) &= (x + iy)^3 + 7(x + iy)^2 + 2(x + iy) + 1 \\ &= (x^3 + 7x^2 - 3xy^2 - 7y^2 + 2x + 1) + i(3x^2 y + 14xy - y^3 + 2y)\end{aligned}$$

oder als Funktion $\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\tilde{g}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + 7x^2 - 3xy^2 - 7y^2 + 2x + 1 \\ 3x^2 y + 14xy - y^3 + 2y \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 + 14x - 3y^2 + 2 = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -6xy - 14y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\end{aligned}$$

sind die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen erfüllt.

Aufgabe 4. (Komplex differenzierbare Funktionen sind harmonisch)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt harmonisch, wenn für jede Komponentenfunktion $f^{(k)}$ die Bedingung

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f^{(k)}}{\partial x_j^2} = 0$$

für die zweimaligen partiellen Ableitungen gilt.

Zeigen Sie: Komplex differenzierbare Funktionen $f = (u, v)$ sind notwendigerweise harmonisch, d.h. es gilt $u_{xx} + u_{yy} = 0$ und $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

(Tip: Beachten Sie, daß die Komponentenfunktionen komplex differenzierbarer Funktionen notwendigerweise stetig partiell differenzierbar sind (warum?) und verwenden Sie einen geeigneten Satz der Analysis II.)

Lösung 4.

Da holomorphe Funktionen beliebig oft differenzierbar sind, müssen sämtliche Ableitungen stetig sein, insbesondere die partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen. Sei nun also $f = (u, v)$ eine (überall) komplex differenzierbare Funktion. Dann sind die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

erfüllt. Mit dem Satz von SCHWARZ gilt zudem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

aufgrund der Stetigkeit der partiellen Ableitungen. Daraus folgt insgesamt

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

(Anmerkung: Die harmonischen Funktionen und allgemein die doppelten partiellen Ableitungen spielen in der Wellenmechanik eine große Rolle. Der Begriff ist uns schon einmal bei den Differentialgleichungen als der *harmonische* Oszillator begegnet.

Man verwendet als abkürzende Schreibweise gerne den LAPLACE-Operator

$$\Delta := \operatorname{div} \operatorname{grad} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

der auf eine reellwertige Funktion in den Variablen $x_1, \dots, x_m$ anwendbar ist. In dieser Schreibweise ist eine Funktion $\vec{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann harmonisch, wenn die sogenannten LAPLACE-Differentialgleichungen $\Delta f^{(k)} = 0$ für alle $k = 1, \dots, n$ erfüllt sind, wobei $f^{(k)}$ wieder die k -te Komponente von $\vec{f}$ bezeichne.

Im Fall komplex differenzierbarer Funktionen $f = u + iv$ erhält man die ebenso knappe wie hübsche Identität $\Delta u = \Delta v = 0$.)