

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zu Blatt 8

Aufgabe 1. (Fehler der Keplerschen Faßregel)

Oftmals steht man vor dem Problem, ein Integral nicht berechnen zu können, da keine explizite Stammfunktion ausfindig gemacht werden kann. Es gibt jedoch numerische Methoden (Quadraturverfahren), mit denen der Wert des Integrals approximiert werden kann. Man macht sich dazu die Tatsache zunutze, mit Polynomen jede stetige Funktion beliebig gut auf einem kompakten Intervall approximieren zu können. Den Wert des tatsächlichen Integrals ersetzt man dann durch den Wert, den das Integral über das Polynom liefert. Eines dieser Verfahren beruht auf der Keplerschen Faßregel (vgl. Aufgabe 5 von Blatt 7): Die Funktion wird mit einem Polynom zweiten Grades zu den Stützstellen $a, \frac{a+b}{2}, b$ interpoliert. Die resultierende Formel für das „Ersatzintegral“ lautet

$$\int_a^b f(x) dx \approx Q[f] := \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Wie so oft ist man an dem Fehler interessiert, den man bei dieser Approximation macht. Zeigen Sie: Existiert f''' und gilt $f'''(x) \leq M$ auf $[a, b]$, so gilt für den Fehler die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Q[f] \right| \leq 0,0082(b-a)^4 M.$$

(Hinweis: Betrachten Sie das Intervall $[-h, h]$. Für die Funktion f gilt mit der LAGRANGE-Restgliedformel die Darstellung

$$f(x) = p(x) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{3!} f'''(\xi) \quad \text{mit } \xi \in (-h, h).$$

Bestimmen Sie das Maximum des auftauchenden Polynoms dritten Grades. Schätzen Sie damit zunächst den Fehler der Interpolation, danach den Fehler der Keplerschen Faßregel nach oben ab.)

Lösung 1.

Die Verschiebung des Intervalls $[a, b]$ nach $[-h, h]$ kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorgenommen werden. Dazu setzt man $h = \frac{b-a}{2}$ und betrachtet $\tilde{f}(x) = f\left(x + \frac{a+b}{2}\right)$. Die Quadraturformel lautet jetzt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-h}^h \tilde{f}(x) dx \approx Q[f] = \tilde{Q}[\tilde{f}] = \frac{h}{3} (\tilde{f}(-h) + 4\tilde{f}(0) + \tilde{f}(h)).$$

Die Darstellung von f wird ebenfalls translatiert und man erhält mit der LAGRANGE-Restgliedformel

$$\tilde{f}(x) = \tilde{p}(x) + \underbrace{\frac{(x+h)x(x-h)}{3!} \tilde{f}'''(\tilde{\xi})}_{\tilde{R}(x)}, \quad \tilde{\xi} \in (-h, h),$$

wobei $\tilde{p}$ das Interpolationspolynom zweiten Grades für $\tilde{f}$ zu den Stützstellen $-h, 0, h$ ist. Das Restglied soll nun abgeschätzt werden. Dazu wird das Maximum des Betrages von $q(x) := (x+h)x(x-h)$ auf $[-h, h]$ gesucht. Offenbar ist q ein ungerades Polynom. Dann ist $|q|$ gerade. Das Maximum wird demnach auf $(-h, 0)$ angenommen. In diesem Intervall ist q positiv und es folgt

$$\sup_{x \in [-h, h]} |q(x)| = \sup_{x \in (-h, 0)} q(x) = \sup_{x \in (-h, 0)} (x^3 - h^2 x).$$

Die Ableitung $q'(x) = 3x^2 - h^2$ besitzt in $(-h, 0)$ eine Nullstelle bei $x_0 = -h/\sqrt{3}$. Dort muß q ein Maximum besitzen, da $q(0) = q(-h) = 0$ gilt. Es folgt

$$\sup_{x \in [-h, h]} |q(x)| = q\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^3 - h^2\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} h^3 \leq 0,39h^3.$$

Das Restglied kann nun abgeschätzt werden durch

$$\sup_{x \in [-h, h]} |\tilde{R}(x)| \leq \frac{0,39h^3}{3!} \tilde{M} \leq 0,065h^3 \tilde{M} \quad \text{mit} \quad \tilde{M} := \sup_{\tilde{\xi} \in (-h, h)} |\tilde{f}'''(\xi)|.$$

Translatiert man nun wieder auf das Intervall $[a, b]$, so gilt offenbar $\tilde{M} = M$ und der zugehörige Rest wird abgeschätzt durch

$$\sup_{x \in [a, b]} |R(x)| \leq 0,065 \frac{(b-a)^3}{8} M \leq 0,0082(b-a)^3 M.$$

Man erhält schließlich

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Q[f] \right| = \left| \int_a^b R(x) dx \right| \leq \int_a^b 0,0082(b-a)^3 M dx \leq 0,0082(b-a)^4 M.$$

Aufgabe 2. (Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

- (a) $y'' + 3y' - 10y = 0, \quad y(0) = 7/10, \quad y'(0) = 0$
- (b) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
- (c) $2y'' + 8y' + 10y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
- (d) $y'' - 3y' + 2y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 7/8$

Lösung 2.

Lineare Differentialgleichungen werden mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ gelöst. Das führt auf ein Polynom $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, dessen Nullstellen zu bestimmen sind. Dieser Schritt des Einsetzens wird im allgemeinen nicht explizit ausgeführt, sondern direkt das entstehende Polynom betrachtet.

- (a) Der Ansatz liefert $0 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda - 2)(\lambda + 5)$. Das Polynom besitzt die Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -5$. Die allgemeine Lösung lautet demnach $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingungen liefern

$$C_1 + C_2 = \frac{7}{10} \quad \wedge \quad 2C_1 - 5C_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad C_2 = \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{5} e^{-5x}.$$

- (b) Hier folgt aus dem Ansatz $0 = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$. Die allgemeine (komplexwertige) Lösung lautet daher $\tilde{y}(x) = \tilde{C}_1 e^{-ix} + \tilde{C}_2 e^{ix}$ mit $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{C}$, also *komplexen* Konstanten. Da man hier nur an der reellen Lösung interessiert ist, setzt man $\tilde{C}_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ und $\tilde{C}_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Mit der EULER-Formel $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$ folgt dann für den Realteil der Lösung

$$y(x) = \alpha_1 \cos(-x) - \beta_1 \sin(-x) + \alpha_2 \cos x - \beta_2 \sin x = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingungen liefern schließlich

$$C_1 = 0 \quad \wedge \quad C_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \sin x.$$

Verzichtet man auf Substitution der Konstanten $\tilde{C}_1$ und $\tilde{C}_2$, so erhält man aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 &= 0 \quad \wedge \quad -i\tilde{C}_1 + i\tilde{C}_2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{C}_1 = \frac{i}{2} \quad \wedge \quad C_2 = -\frac{i}{2} \\ \Longrightarrow \quad \tilde{y}(x) &= \frac{i}{2} e^{-ix} - \frac{i}{2} e^{ix} = \frac{i}{2} (\cos(-x) + i \sin(-x) - \cos x - i \sin x) = \sin x. \end{aligned}$$

- (c) Nach Kürzen lautet das Polynom $\lambda^2 + 4\lambda + 5$. Es folgt

$$0 = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = (\lambda + 2)^2 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = -2 \pm i.$$

Die (komplexwertige) allgemeine Lösung ist also

$$\tilde{y}(x) = \tilde{C}_1 e^{(-2-i)x} + \tilde{C}_2 e^{(-2+i)x} = e^{-2x} (\tilde{C}_1 e^{-ix} + \tilde{C}_2 e^{ix})$$

mit $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{C}$. Auch hier kann man sich wieder auf den Realteil der Lösung mit den Substitutionen $\tilde{C}_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ und $\tilde{C}_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ beschränken. Diese lautet dann

$$y(x) = e^{-2x} (\alpha_1 \cos(-x) - \beta_1 \sin(-x) + \alpha_2 \cos x - \beta_2 \sin x) = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Die Ableitung von y ist

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x}(C_2 \cos x - C_1 \sin x) \\ &= e^{-2x}((-2C_1 + C_2) \cos x - (2C_2 + C_1) \sin x). \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt damit

$$C_1 = 1 \wedge -2C_1 + C_2 = 0 \iff C_1 = 1 \wedge C_2 = 2 \implies y(x) = e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x).$$

Auch hier kann man zunächst auf die Substitution der Variablen $\tilde{C}_1$ und $\tilde{C}_2$ verzichten. Die Ableitung von $\tilde{y}$ ist $\tilde{y}'(x) = (-2-i)\tilde{C}_1 e^{(-2-i)x} + (-2+i)\tilde{C}_2 e^{(-2+i)x}$ und damit erhält man aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 &= 1 \wedge (-2-i)\tilde{C}_1 + (-2+i)\tilde{C}_2 = 0 \iff \tilde{C}_1 = \frac{1}{2} + i \wedge \tilde{C}_2 = \frac{1}{2} - i \\ \implies \tilde{y}(x) &= e^{-2x} \left[\left(\frac{1}{2} + i \right) e^{-ix} + \left(\frac{1}{2} - i \right) e^{ix} \right] = e^{-2x} \left[\frac{1}{2}(e^{-ix} + e^{ix}) + i(e^{-ix} - e^{ix}) \right] = e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x). \end{aligned}$$

- (d) Es handelt sich um eine inhomogene Differentialgleichung. Die zugehörige homogene Form führt auf das Polynom $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Die homogene Lösung lautet also $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Eine partikuläre Lösung findet man sehr leicht. Setzt man $y_p(x) = \frac{1}{2}x + \gamma$ an, so erhält man $-\frac{3}{2} + 2\gamma = 0$, also $\gamma = \frac{3}{4}$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Mit den Anfangsbedingungen folgt

$$C_1 + C_2 + \frac{3}{4} = 1 \wedge C_1 + 2C_2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \iff C_1 = C_2 = \frac{1}{8} \implies y(x) = \frac{1}{8}(e^x + e^{2x}) + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 3. (Homogene lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. das Anfangswertproblem:

- (a) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
 (b) $y^{(4)} - y''' + y'' - y' = 0$
 (c) $y''' + 4y' = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

Lösung 3.

Hier gilt das unter Aufgabe 2 Gesagte entsprechend.

- (a) Man erhält das Polynom $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$ mit der dreifachen Nullstelle -1 . Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

- (b) Das Polynom lautet hier $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i)$. Die (komplexwertige) Lösung ist also

$$\tilde{y}(x) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 e^x + \tilde{C}_3 e^{-ix} + \tilde{C}_4 e^{ix}, \quad \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4 \in \mathbb{C}.$$

Mit (bereits mehrfach erwähnten) Substitutionen erhält man den Realteil der Lösung

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

- (c) Das Polynom $\lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda + 2i)(\lambda - 2i)$ führt auf die allgemeine, komplexwertige Lösung

$$\tilde{y}(x) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 e^{-2ix} + \tilde{C}_3 e^{2ix}, \quad \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3 \in \mathbb{C},$$

sowie die reelle Lösung

$$y(x) = C_1 + C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingungen liefern

$$C_1 + C_2 = 0 \wedge 2C_3 = 0 \wedge -4C_2 = 1 \iff C_1 = \frac{1}{4} \wedge C_2 = -\frac{1}{4} \wedge C_3 = 0 \implies y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(2x).$$

Wiederum können die Anfangsbedingungen natürlich direkt auf $\tilde{y}$ angewendet werden. Man erhält dann

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3 &= 0 \wedge -2i\tilde{C}_2 + 2i\tilde{C}_3 = 0 \wedge -4\tilde{C}_2 - 4\tilde{C}_3 = 1 \iff \tilde{C}_1 = \frac{1}{4} \wedge \tilde{C}_2 = \tilde{C}_3 = -\frac{1}{8} \\ \implies \tilde{y}(x) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(e^{-2ix} + e^{2ix}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(2x). \end{aligned}$$

Aufgabe 4. (Gedämpfte harmonische Schwingung)

Ein Massepunkt sei mit einer Feder im Ursprung befestigt und bewege sich auf der x -Achse. Bei nicht allzu großer Auslenkung schwingt er dann harmonisch, das heißt die Rückstellkraft $m\ddot{x}$ ist proportional zur momentanen Auslenkung $x(t)$. Ist die Bewegung zusätzlich durch eine geschwindigkeitsproportionale Reibung behindert, so gehorcht der Massepunkt insgesamt der Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx$$

mit Konstanten $m, r, k > 0$. Diese Gleichung wird oft mit den Substitutionen $\rho := r/(2m)$ und $\omega_0 := \sqrt{k/m}$ in die Form

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

gebracht und die Gleichung des gedämpften harmonischen Oszillators genannt. Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung für die Fälle

$$(a) \rho > \omega_0, \quad (b) \rho = \omega_0 \quad \text{und} \quad (c) \rho < \omega_0.$$

Was ergeben sich jeweils für Bewegungen? Der Oszillator werde nun mit einer festen Schwingung $a \cos(\omega t)$ angeregt. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = a \cos(\omega t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

für die Fälle

$$(d) \rho = 0 \quad \text{und} \quad (e) \rho > 0.$$

(Tip: Um eine partikuläre Lösung für den Teil (e) zu bestimmen, machen Sie den Ansatz $x_p(t) = Ae^{i\omega t}$ und ersetzen Sie $a \cos(\omega t)$ durch $e^{i\omega t}$. Benutzen Sie die Eulersche Formel $e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha(\cos \beta + i \sin \beta)$, um x_p in Real- und Imaginärteil zu trennen. Verwenden Sie für die Lösung nur den Realteil.)

Lösung 4.

Es handelt sich zunächst um eine homogene lineare Differentialgleichung. Sie liefert das Polynom $\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2$. Die Nullstellen lauten

$$0 = \lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = (\lambda + \rho)^2 - \rho^2 + \omega_0^2 \iff \lambda = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$$

(a) Im Fall $\rho > \omega_0$ erhält man zwei reelle Nullstellen. Die Lösung ist daher mit $\omega_1 = \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$

$$x(t) = C_1 e^{(-\rho - \omega_1)t} + C_2 e^{(-\rho + \omega_1)t} = e^{-\rho t} (C_1 e^{-\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_1 t}), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Der Massepunkt nähert sich von seiner anfänglichen Auslenkung asymptotisch mit der Zeit dem Ursprung. Das ist der sogenannte *Kriechfall*: Die Reibung ist so groß, daß es nicht zu einer Schwingung kommt. Der Massepunkt wird höchstens einmal den Ursprung überschreiten (falls $|C_2| < |C_1|$ und $C_1 \cdot C_2 < 0$ gilt).

(b) Für $\rho = \omega_0$ ist $-\rho$ eine doppelte Nullstelle. Jetzt lautet die Lösung

$$x(t) = C_1 e^{-\rho t} + C_2 t e^{-\rho t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\rho t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Das ist noch immer der Kriechfall. Für $C_1 \cdot C_2 < 0$ wird der Ursprung einmal überquert, sonst gar nicht.

(c) Gilt $\rho < \omega_0$, so erhält man zwei komplexe Nullstellen und die Lösung lautet mit $\omega_2 := \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{C}_1 e^{(-\rho - i\omega_2)t} + \tilde{C}_2 e^{(-\rho + i\omega_2)t} = e^{-\rho t} (\tilde{C}_1 e^{-i\omega_2 t} + \tilde{C}_2 e^{i\omega_2 t}), \quad \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{C}.$$

Das liefert die reelle Lösung

$$(4.1) \quad x(t) = e^{-\rho t} (C_1 \cos(\omega_2 t) + C_2 \sin(\omega_2 t)) \quad \text{mit} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$(4.2) \quad \text{bzw.} \quad x(t) = A_0 e^{-\rho t} \cos(\omega_2 t + \varphi) \quad \text{mit} \quad A_0 \in \mathbb{R}_0^+, \varphi \in [0, 2\pi).$$

Jetzt schwingt der Massepunkt also tatsächlich, allerdings mit exponentiell abnehmender Amplitude.

(d) Die Erregerschwingung bewirkt ein gänzlich anderes Verhalten. Für $\rho = 0$, also ohne Reibung, lautet die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a \cos(\omega t).$$

Die homogene Lösung kann (4.2) mit $\rho = 0$ entnommen werden (beachte $\omega_2 = \omega_0$):

$$x_h(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Das ist die Schwingungsgleichung ohne Reibung. Zum Auffinden einer partikulären Lösung bietet sich der Ansatz $x_p(t) = A \cos(\omega t)$ an. Dann folgt für $\omega \neq \omega_0$

$$-\omega^2 A \cos(\omega t) + \omega_0^2 A \cos(\omega t) = a \cos(\omega t) \implies A = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \implies x_p(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

und insgesamt die allgemeine Lösung

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t).$$

Die Anfangsbedingungen liefern

$$A_0 \cos \varphi + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \quad \wedge \quad -A_0 \omega_0 \sin \varphi = 0.$$

Die erste Bedingung kann nur mit $A_0 \neq 0$ erfüllt werden (für den interessanten Fall $a \neq 0$). Aus der zweiten Bedingung folgt dann $\varphi = 0$ (oder $\varphi = \pi$, was letzten Endes zu demselben Ergebnis führt) und damit

$$A_0 = -\frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \implies x(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)) = \frac{2a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right),$$

wobei im letzten Schritt $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$ ausgenutzt wurde. Das ist eine *Amplitudenmodulation* wie sie zum Beispiel im Rundfunkbereich eingesetzt wird. Für $\omega \rightarrow \omega_0$ wächst die Amplitude über alle Schranken. Dieses physikalisch sicherlich nicht richtige Verhalten wird durch die im folgenden betrachtete Dämpfung (Reibung) korrigiert.

- (e) Die homogene Lösung kann wieder (4.1) entnommen werden. Der Ansatz $\tilde{x}_p(t) = A e^{i\omega t}$ für die partikuläre Lösung liefert unabhängig von ω_0

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + i 2\rho\omega A e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = a e^{i\omega t} \implies A = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2 + i 2\rho\omega} = \frac{a(\hat{\omega} - i 2\rho\omega)}{\hat{\omega}^2 + 4\rho^2\omega^2}$$

mit $\hat{\omega} = \omega_0^2 - \omega^2$, also

$$\tilde{x}_p(t) = \frac{a(\hat{\omega} - i 2\rho\omega)}{\hat{\omega}^2 + 4\rho^2\omega^2} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \implies x_p(t) = \frac{a}{\hat{\omega}^2 + 4\rho^2\omega^2} (\hat{\omega} \cos(\omega t) + 2\rho\omega \sin(\omega t))$$

als reellwertige Lösung. Zur Abkürzung schreibe $B := a/(\hat{\omega}^2 + 4\rho^2\omega^2)$. Die allgemeine Lösung lautet damit

$$x(t) = e^{-\rho t} (C_1 \cos(\omega_2 t) + C_2 \sin(\omega_2 t)) + B(\hat{\omega} \cos(\omega t) + 2\rho\omega \sin(\omega t)).$$

Mit ihrer Ableitung

$$\dot{x}(t) = e^{-\rho t} (\cos(\omega_2 t)(\omega_2 C_2 - \rho C_1) - \sin(\omega_2 t)(\omega_2 C_1 + \rho C_2)) + B\omega (2\rho\omega \cos(\omega t) - \hat{\omega} \sin(\omega t))$$

erhält man aus den Anfangsbedingungen

$$C_1 = -B\hat{\omega} \quad \wedge \quad \omega_2 C_2 - \rho C_1 = -2B\rho\omega^2 \iff C_1 = -B(\omega_0^2 - \omega^2) \quad \wedge \quad C_2 = -B\rho \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega_2},$$

also insgesamt die Lösung

$$x(t) = -B e^{-\rho t} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega_2 t) + \rho \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right] + B((\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\rho\omega \sin(\omega t)).$$