

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zu Blatt 7

Aufgabe 1. (Bedingte Exaktheit)

Geben Sie an, unter welcher Bedingung die folgenden Differentialgleichungen exakt sind:

- (a) $ax + by + c + (\alpha x + \beta y + \gamma)y' = 0$
(b) $ax^2 + bxy + cy^2 + (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)y' = 0$

Lösung 1.

Eine Differentialgleichung der Form

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

ist genau dann exakt, wenn sie die Integrabilitätsbedingung

$$(1.1) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

erfüllt. Es sind also die Koeffizienten so zu bestimmen, daß diese Gleichung erfüllt wird.

(a) Hier ist $P(x, y) = ax + by + c$ und $Q(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$. Gleichung (1.1) liefert $b = \alpha$.

(b) Mit $P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ und $Q(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ folgt aus (1.1)

$$bx + 2cy = 2\alpha x + \beta y \iff b = 2\alpha \wedge 2c = \beta.$$

Aufgabe 2. (PICARD-LINDELÖF ohne LIPSCHITZ)

Der Satz von PICARD-LINDELÖF gibt Auskunft darüber, unter welchen Voraussetzungen es eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

gibt. Neben der Stetigkeit wird von f gefordert, bezüglich y einer Lipschitzbedingung zu genügen. Daß diese Bedingung wesentlich ist, soll in den folgenden Aufgabeteilen erarbeitet werden.

(a) Es seien ein Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und ein kompaktes Rechteck $R \subset \mathbb{R}^2$ gemäß der Voraussetzungen des Satzes von PICARD-LINDELÖF gegeben, sowie eine auf R definierte stetige reellwertige Funktion f , die keiner Lipschitzbedingung genügt. Zeigen Sie: Die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge (φ_n) ist hinreichend dafür, daß die Grenzfunktion das Anfangswertproblem löst. (Anmerkung: Man kann allerdings nichts über die Eindeutigkeit der Lösung sagen.)

(b) Es sei $R := \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ und f die auf R definierte stetige Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 2x & \text{für } 0 < |x| \leq 1, -1 \leq y < 0, \\ 2x - 4\frac{y}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \\ -2x & \text{für } 0 < |x| \leq 1, x^2 < y \leq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie: f erfüllt keine Lipschitzbedingung bezüglich y und die Funktionenfolge (φ_n) führt nicht auf eine Lösung des Anfangswertproblems mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$. (Hinweis: Verwenden Sie $\varphi_0 = 0$ als Startfunktion).

Mit den Funktionenfolgen (φ_n) sind jeweils die im Satz definierten Folgen gemeint.

Lösung 2.

Die Funktionenfolge im Satz von PICARD-LINDELÖF ist definiert durch

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi)) d\xi, \quad n \in \mathbb{N}$$

mit einer beliebigen auf dem Rechteck R stetigen Startfunktion φ_0 .

(a) Die Folge (φ_n) konvergiert nach Voraussetzung stetig. Es sei φ die Grenzfunktion der Folge, also

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n.$$

(i) φ ist stetig.

Beweis: Jede der Funktionen φ_n ist stetig. Daher ist φ als Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ebenfalls stetig. $\square$

(ii) Es gilt $\frac{d\varphi}{dx}(x) = f(x, \varphi(x))$.

Beweis: Das kompakte Rechteck R sei durch die kompakten Intervalle R_x und R_y gemäß $R = R_x \times R_y$ erklärt. Ferner sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Die Funktion f ist stetig auf dem kompakten Rechteck R , also gleichmäßig stetig. Das gilt insbesondere für die Abbildung $y \mapsto f(\xi, y)$ mit $\xi \in R_x$ beliebig. Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$\forall y, \tilde{y} \in R_y : |\tilde{y} - y| < \delta \implies |f(\xi, \tilde{y}) - f(\xi, y)| < \varepsilon.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Folge (φ_n) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n, m \geq N$ und $\xi \in R_x$ gilt

$$|\varphi_n(\xi) - \varphi_m(\xi)| < \delta.$$

Daher gilt für alle $\xi \in R_x$

$$\left| \frac{d\varphi_{n+1}}{dx}(\xi) - \frac{d\varphi_{m+1}}{dx}(\xi) \right| = |f(\xi, \varphi_n(\xi)) - f(\xi, \varphi_m(\xi))| < \varepsilon$$

Das bedeutet aber gerade, die Folge $(\frac{d\varphi_n}{dx})$ konvergiert gleichmäßig, also gegen $\frac{d\varphi}{dx}$. Damit folgt schließlich

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d\varphi_n}{dx}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, \varphi_{n-1}(x)) = f(x, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n-1}(x)) = f(x, \varphi(x))$$

unter erneuter Ausnutzung der Stetigkeit von f . $\square$

(iii) Es gilt $\varphi(x_0) = y_0$.

Beweis: Da die Folge (φ_n) gleichmäßig konvergiert, konvergiert sie erst recht punktweise. Insbesondere an der Stelle x_0 gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varphi_n(x_0) = y_0.$$

Damit folgt sofort $\varphi(x_0) = y_0$. $\square$

Daher ist φ tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems.

(b) (i) f erfüllt keine Lipschitzbedingung bezüglich y auf R .

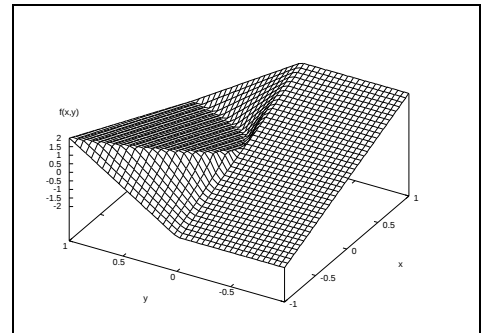
Beweis: f erfüllt genau dann eine Lipschitzbedingung bezüglich y auf R , wenn es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in R$ gilt

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \leq L|\tilde{y} - y|.$$

Für $0 < |x| \leq 1$ und $0 \leq y < \tilde{y} \leq x^2$ gilt hier aber

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| = \left| 2x - 4\frac{\tilde{y}}{x} - 2x + 4\frac{y}{x} \right| = \frac{4}{|x|}|\tilde{y} - y|.$$

Der Term $4/|x|$ wird für $|x| \rightarrow 0$ beliebig groß, daher kann kein solches $L \in \mathbb{R}$ existieren. $\square$



(ii) Die Funktionenfolge (φ_n) konvergiert nicht für $y(0) = 0$.

Beweis: Setze $\varphi_0 = 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \int_0^x f(\xi, 0) d\xi = \int_0^x 2\xi d\xi = x^2 \\ \varphi_2(x) &= \int_0^x f(\xi, \varphi_1(\xi)) d\xi = \int_0^x f(\xi, \xi^2) d\xi = \int_0^x -2\xi d\xi = -x^2 \\ \varphi_3(x) &= \int_0^x f(\xi, \varphi_2(\xi)) d\xi = \int_0^x f(\xi, -\xi^2) d\xi = \int_0^x 2\xi d\xi = x^2 \\ \implies \varphi_n(x) &= (-1)^{n-1} x^2 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Es ergibt sich eine alternierende Folge, die offensichtlich nicht konvergiert. $\square$

Aufgabe 3. (Numerische Lösungen von Differentialgleichungen)

Sehr häufig steht man vor dem Problem, ein Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

nicht explizit oder gar nicht lösen zu können. In diesen Fällen bleibt nur der Ausweg, die Lösung mit numerischen Methoden zu approximieren. Zwei dieser Verfahren werden hier vorgestellt.

- EULER-CAUCHY-Polygonzugverfahren: Von der bekannten Lösung $y(x_0) = y_0$ ausgehend versucht man, durch schrittweises Durchlaufen des Intervalls $[x_0, x_0 + a]$ den Wert $y(x_0 + a)$ anzunähern. Das geschieht durch die rekursive Vorschrift

$$y_\nu = y_{\nu-1} + hf(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}), \quad h := \frac{a}{n}, \quad 1 \leq \nu \leq n,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Schritte vorgibt. Die gesuchte Näherung ist dann $y(x_0 + a) \approx y_n$.

- RUNGE-KUTTA-Verfahren: Auch hier wird das Intervall $[x_0, x_0 + a]$ in n Schritten durchlaufen, um eine Näherung für $y(x_0 + a)$ zu bestimmen. Die Rekursionsvorschrift lautet

$$\begin{aligned}k_{\nu 1} &:= f(x_\nu, y_\nu) \\ k_{\nu 2} &:= f\left(x_\nu + \frac{1}{2}h, y_\nu + \frac{1}{2}hk_{\nu 1}\right) \\ k_{\nu 3} &:= f\left(x_\nu + \frac{1}{2}h, y_\nu + \frac{1}{2}hk_{\nu 2}\right) \\ k_{\nu 4} &:= f(x_\nu + h, y_\nu + hk_{\nu 3}) \\ k_\nu &:= \frac{h}{6}(k_{\nu 1} + k_{\nu 2} + k_{\nu 3} + k_{\nu 4}) \\ y_{\nu+1} &:= y_\nu + k_\nu\end{aligned}$$

für $0 \leq \nu \leq n-1$. Die gesuchte Näherung ist wiederum $y(x_0 + a) \approx y_n$.

Um die Güte dieser Verfahren besser einschätzen zu können, werden sie hier auf eine explizit lösbare Differentialgleichung angewendet.

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y + 1, \quad y(2) = 2.$$

(b) Bestimmen Sie die numerische Lösung von $y(3)$ mit dem EULER-CAUCHY-Polygonzugverfahren für $n = 4$ auf drei Nachkommastellen genau und geben Sie den Fehler in Prozent an.

(c) Wenden Sie das RUNGE-KUTTA-Verfahren für $n = 1$ und $n = 2$ an, um $y(3)$ zu approximieren. Rechnen Sie dazu wieder mit drei Dezimalen nach dem Komma und geben Sie den Fehler in Prozent an.

(Vergleichen Sie mal die Genauigkeit der beiden Verfahren, insbesondere unter dem Aspekt, daß für den EULER-CAUCHY-Polygonzug mit $n = 4$ und das RUNGE-KUTTA-Verfahren mit $n = 1$ jeweils vier Funktionswerte benutzt werden!)

Lösung 3.

- (a) Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung ersten Grades. Die zugehörige homogene Differentialgleichung hat die Lösung

$$y_h(x) = C \exp\left(\int \frac{2}{x} dx\right) = C \exp(2 \ln|x|) = Cx^2$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Mittels Variation der Konstanten $C = C(x)$ erhält man eine partikuläre Lösung:

$$\frac{dC}{dx}(x)x^2 + 2C(x)x = 2C(x)x + 1 \iff \frac{dC}{dx}(x) = \frac{1}{x^2} \implies C(x) = -\frac{1}{x} \implies y_p(x) = -x$$

Die allgemeine Lösung lautet also $y(x) = Cx^2 - x$ und mit $y(2) = 2$ folgt $C = 1$, also $y(x) = x^2 - x$.

- (b) Ausgehend von $x_0 = 2$, $y_0 = 2$ und $h = 0,25$ erhält man

$$\begin{aligned}y_1 &= 2,000 + 0,25 \cdot f(2,000; 2,000) = 2,000 + 0,25 \cdot 3,000 = 2,750, \\y_2 &= 2,750 + 0,25 \cdot f(2,250; 2,750) = 2,750 + 0,25 \cdot 3,444 = 3,611, \\y_3 &= 3,611 + 0,25 \cdot f(2,500; 3,611) = 3,611 + 0,25 \cdot 3,889 = 4,583, \\y_4 &= 4,583 + 0,25 \cdot f(2,750; 4,583) = 4,583 + 0,25 \cdot 4,333 = 5,666,\end{aligned}$$

also die Näherung $y(3) \approx 5,666$. Der Fehler beträgt 5,567%.

- (c) Wie zuvor ist $x_0 = 2$ und $y_0 = 2$.

- (i) $n = 1$. Dann ist $h = 1$ und es folgt

$$\begin{aligned}k_{11} &= f(2,000; 2,000) = 3,000, & k_{21} &= f(2,500; 3,500) = 3,800, \\k_{31} &= f(2,500; 3,900) = 4,120, & k_{41} &= f(3,000; 6,120) = 5,080, \\k_1 &= 3,987, & y_1 &= 2,000 + 3,987 = 5,987,\end{aligned}$$

also $y(3) \approx 5,987$. Der Fehler beträgt nur 0,217%.

- (ii) $n = 2$. Jetzt ist $h = 0,5$. Damit folgt

$$\begin{aligned}k_{11} &= f(2,000; 2,000) = 3,000, & k_{21} &= f(2,250; 2,750) = 3,444, \\k_{31} &= f(2,250; 2,861) = 3,543, & k_{41} &= f(2,500; 3,772) = 4,018, \\k_1 &= 1,749, & y_1 &= 2,000 + 1,749 = 3,749, \\k_{12} &= f(2,500; 3,749) = 3,999, & k_{22} &= f(2,750; 4,749) = 4,454, \\k_{32} &= f(2,750; 4,863) = 4,537, & k_{42} &= f(3,000; 6,018) = 5,012, \\k_2 &= 2,249, & y_2 &= 3,749 + 2,249 = 5,998,\end{aligned}$$

also $y(3) \approx 5,998$. Der Fehler ist jetzt nur noch 0,033%.

Der Unterschied der beiden Verfahren ist recht erstaunlich. Immerhin differiert der Fehler bei gleichvielen benutzten Funktionswerten (Teile (b) und (c,i)) um mehr als 5%.

Aufgabe 4. (Eulerhomogene Differentialgleichung)

Eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

heißt EULER-homogene Differentialgleichung. Bringen Sie sie durch eine geeignete Substitution auf eine Form, die eine Lösung mittels Trennung der Veränderlichen gestattet. Folgern Sie damit, daß die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{x + 2y}{2x + y}, \quad y(1) = 0$$

gegeben ist durch

$$x + y = (x - y)^3.$$

Lösung 4.

Eine geeignete Substitution ist offensichtlich $z(x) := \frac{y(x)}{x}$. Dann folgt für $x \neq 0$

$$\frac{dz}{dx}(x) = \frac{\frac{dy}{dx}(x)x - y(x)}{x^2} = \frac{f(z) - z}{x}.$$

Diese Differentialgleichung kann mittels Trennung der Veränderlichen durch die Umformung

$$(4.1) \quad \frac{1}{f(z) - z} dz = \frac{1}{x} dx$$

für $f(z) \neq z$ gelöst werden. Das angegebene Anfangswertproblem kann umgeformt werden zu

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{1 + 2\frac{y}{x}}{2 + \frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(z(x)).$$

Mit (4.1) erhält man

$$(4.2) \quad \int \frac{1}{f(z) - z} dz = \int \frac{1}{\frac{1+2z}{2+z} - z} dz = \int \frac{2+z}{1-z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx = C + \ln|x|$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Hierbei muß $|z| = 1$ ausgeschlossen werden. Das Integral auf der linken Seite wird in zwei Integrale unterteilt:

$$\int \frac{2+z}{1-z^2} dz = \int \frac{2}{1-z^2} dz - \frac{1}{2} \int \frac{-2z}{1-z^2} dz = 2 \int \frac{1}{1-z^2} dz - \frac{1}{2} \ln|1-z^2|$$

Das noch übriggebliebene Integral kann durch Partialbruchzerlegung gelöst werden (vergleiche Aufgabe 6.2(c)):

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} \right) \implies 2 \int \frac{1}{1-z^2} dz = \int \left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} \right) dz = \ln|1+z| - \ln|1-z| = \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right|$$

Damit folgt

$$\int \frac{2+z}{1-z^2} dz = \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| - \frac{1}{2} \ln|1-z^2| = \ln \frac{\sqrt{|1+z|}}{|1-z|^{3/2}}.$$

Einsetzen in (4.2) liefert

$$(4.3) \quad \ln \frac{\sqrt{|1+z|}}{|1-z|^{3/2}} = C + \ln|x| \iff \frac{\sqrt{|1+z|}}{|1-z|^{3/2}} = \tilde{C}|x| \iff |1+z| = \hat{C}x^2|1-z|^3$$

mit $\tilde{C}, \hat{C} \in \mathbb{R}^+$. Die Randbedingung $y(1) = 0$ wird durch die Substitution überführt in $z(1) = 0$. Das liefert $\hat{C} = 1$. Da $|z| = 1$ ausgeschlossen werden muß, ist (4.3) nur für $|z| < 1$ gültig. Dann können die Betragstriche entfallen und es folgt

$$1+z = x^2(1-z)^3.$$

Die Rücksubstitution $z = \frac{y}{x}$ liefert schließlich (beachte $x \neq 0$)

$$1 + \frac{y}{x} = x^2 \left(1 - \frac{y}{x} \right)^3 \iff x + y = (x - y)^3.$$

Anmerkung: Da der Fall $|z| = 1$ durch die Substitution verlorengeht, muß dieser gesondert untersucht werden. Aus $|z| = 1$ folgt $y(x) = \pm x$ und dies sind tatsächlich auch Lösungen der Differentialgleichung. Sie sind allerdings nicht mit der Bedingung $y(1) = 0$ vereinbar.

Die Abbildung rechts zeigt eine Approximation des Anfangswertproblems $y' = \frac{x+2y}{2x+y}$, $y(1) = 0$. Sie wurde mit dem RUNGE-KUTTA-Verfahren in dem Intervall $[-10, 10]$ an 300 Stellen mit der Tiefe $n = 1$ berechnet. Es ist deutlich zu erkennen, daß das Verfahren in der Nähe des Ursprungs aufgrund der Unstetigkeit in der Differentialgleichung falsche Werte liefert. Zum Vergleich ist die explizite Lösung als durchgezogene Linie dargestellt.

