

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 1. (Bevölkerungswachstum in Entwicklungsländern)

Untersuchungen haben ergeben, daß das Bevölkerungswachstum in Entwicklungsländern sich nicht wie $dP/dt = \alpha P$ verhält, sondern eher durch die Differentialgleichung

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P^\beta$$

mit Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta > 1$ beschrieben wird.

Lösen Sie diese Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $P(0) = P_0$ und zeigen Sie: Die Wachstumsrate ist so groß, daß $P(t)$ schon in endlicher Zeit T über alle Schranken wächst. Berechnen Sie T .

Lösung 1.

Die Differentialgleichung läßt sich mit Trennung der Veränderlichen lösen. Durch Umformung erhält man ($P > 0$)

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P^\beta \iff P^{-\beta} dP = \alpha dt \iff \frac{1}{1-\beta} P^{1-\beta} = \alpha t + C \iff P^{1-\beta} = \alpha(1-\beta)t + \tilde{C}$$

mit einem $C \in \mathbb{R}$ bzw. $\tilde{C} \in \mathbb{R}$. Einarbeiten der Anfangsbedingung $P(0) = P_0$ liefert

$$\tilde{C} = P_0^{1-\beta} \implies P^{1-\beta} = \alpha(1-\beta)t + P_0^{1-\beta}$$

und damit (solange der rechte Term positiv bleibt)

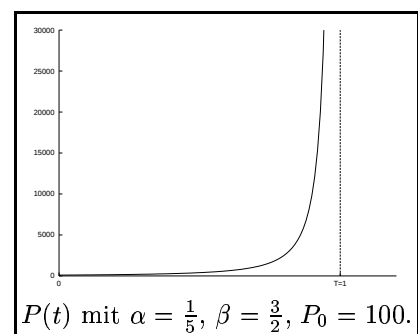
$$P(t) = (\alpha(1-\beta)t + P_0^{1-\beta})^{1/(1-\beta)} = \frac{1}{(\alpha(1-\beta)t + P_0^{1-\beta})^{1/(\beta-1)}}.$$

P wächst über alle Grenzen, da der Nenner für einen Zeitpunkt $T < \infty$ verschwindet:

$$0 = (\alpha(1-\beta)T + P_0^{1-\beta})^{1/(\beta-1)} \iff T = \frac{1}{\alpha(\beta-1)} P_0^{1-\beta}$$

Die Lösung ist daher gültig auf dem halboffenen Intervall

$$t \in \left[0, \frac{1}{\alpha(\beta-1)} P_0^{1-\beta}\right).$$



Aufgabe 2. (Trennung der Veränderlichen)

(a) Zeigen Sie: Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \quad b \neq 0$$

wird durch die Substitution $z = ax + by + c$ in eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen überführt.

Lösen Sie mit diesem Ansatz:

$$(b) \quad y' = (x + y)^2$$

$$(c) \quad y' = (x - y)^2, \quad -1 < x - y < 1$$

Lösung 2.

(a) Mit der Substitution $z := ax + by + c$ folgt

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} = a + bf(z),$$

also

$$\frac{1}{a + bf(z)} dz = dx \implies \int \frac{1}{a + bf(z)} dz = x + C$$

mit einem $C \in \mathbb{R}$.

(b) Die Substitution $z := x + y$ führt auf

$$\int \frac{1}{1 + z^2} dz = x + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Die Lösung des unbestimmten Integrals – falls man sie nicht kennt; dieses Integral gehört *unbedingt* zu den merkwürdigen Integralen! – ist etwas trickreich. Dazu betrachte zunächst

$$\frac{d}{d\xi} \tan \xi = \frac{d \sin \xi}{d\xi \cos \xi} = \frac{\cos^2 \xi + \sin^2 \xi}{\cos^2 \xi} = 1 + \tan^2 \xi.$$

Das legt die Substitution $z = \tan \xi$, $dz = (1 + \tan^2 \xi) d\xi$ nahe:

$$x + C = \int \frac{1}{1 + z^2} dz = \int \frac{1 + \tan^2 \xi}{1 + \tan^2 \xi} d\xi = \xi = \arctan z$$

Damit folgt nun

$$z(x) = \tan(x + C), \quad x + C \neq \frac{2k+1}{2}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

und letztlich mit der Rücksubstitution $y = z - x$

$$y(x) = \tan(x + C) - x, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x + C \neq \frac{2k+1}{2}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Lösung ist auf jedem der offenen Intervalle

$$\left(\frac{2k-1}{2}\pi - C, \frac{2k+1}{2}\pi - C \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

definiert. Eine etwaige Anfangsbedingung beschränkt die Lösung auf genau eines der Intervalle.

(c) Die Substitution $z = x - y$ liefert

$$\int \frac{1}{1 - z^2} dz = x + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Offenbar gilt $|z| = |x - y| < 1$. Der Integrand wird einer *Partialbruchzerlegung* unterzogen:

$$\frac{1}{1 - z^2} = \frac{1}{(1 + z)(1 - z)} = \frac{A}{1 + z} + \frac{B}{1 - z} \implies A = B = \frac{1}{2}$$

Damit folgt

$$x + C = \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{1 + z} dz + \int \frac{1}{1 - z} dz \right) = \frac{1}{2} (\ln|1 + z| - \ln|1 - z|) = \ln \sqrt{\left| \frac{1 + z}{1 - z} \right|}.$$

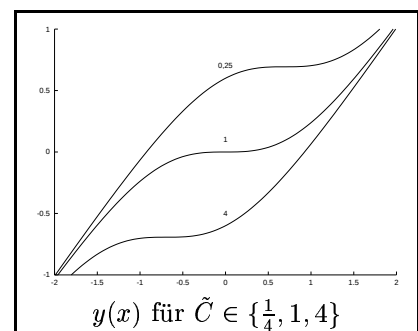
Wegen $|z| < 1$ können die Betragstriche entfallen und es folgt weiter

$$\frac{1 + z}{1 - z} = \tilde{C} e^{2x} \iff (\tilde{C} e^{2x} + 1)z = \tilde{C} e^{2x} - 1 \iff z = \frac{\tilde{C} e^{2x} - 1}{\tilde{C} e^{2x} + 1}$$

mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}^+$. Die Rücksubstitution $y = x - z$ schließlich liefert

$$y(x) = x - \frac{\tilde{C} e^{2x} - 1}{\tilde{C} e^{2x} + 1}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}^+.$$

Die Lösung ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.



Aufgabe 3. (Exakte Differentialgleichungen)

Prüfen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit und lösen Sie sie ggf. mit einem integrierenden Faktor. Falls möglich, geben Sie die Lösung in expliziter Form an.

- (a) $(e^y + y \cos(xy)) dx + (xe^y + x \cos(xy)) dy = 0$
(b) $xy^2 + y - xy' = 0$
(c) $(\cos y + 2xy) + (x^2 - y - x \sin y)y' = 0, \quad y(0) = \sqrt{2}$
(d) $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$

(Tip: Die integrierenden Faktoren sind nur von einer Variablen abhängig.)

Lösung 3.

Im folgenden seien P und Q jeweils die Funktionen, die durch

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

definiert werden.

(a) Wegen

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = e^y + \cos(xy) - xy \sin(xy) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

ist die Differentialgleichung exakt. Es folgt

$$F(x, y) = \int P dx = \int (e^y + y \cos(xy)) dx = xe^y + \sin(xy) + \varphi(y)$$

mit einer *nur* von y abhängenden Funktion φ (dieser Umstand wird in den weiteren Aufgaben unerwähnt bleiben). Es muß gelten

$$Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \iff xe^y + x \cos(xy) = xe^y + x \cos(xy) + \frac{d\varphi}{dy}(y) \iff \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Man kann daher $\varphi = 0$ wählen und erhält als Lösung

$$F(x, y) = xe^y + \sin(xy) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sie ist nicht nach x oder y auflösbar.

(b) Hier ist $P(x, y) = xy^2 + y$ und $Q(x, y) = -x$. Die Differentialgleichung ist wegen

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2xy + 1 \neq -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

nicht exakt. Versuche einen integrierenden Faktor $M(x)$ zu finden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(MP)}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial(MQ)}{\partial x}(x, y) \iff M(x) \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{dM}{dx}(x)Q(x, y) + M(x) \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \\ \iff (2xy + 1)M(x) &= -x \frac{dM}{dx}(x) - M(x) \iff \frac{dM}{dx}(x) = -\frac{1}{x}(2xy + 2)M(x) \end{aligned}$$

Offenbar hängt M auch von der Variablen y ab, was vermieden werden sollte. Wähle daher den Ansatz $M = M(y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(MP)}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial(MQ)}{\partial x}(x, y) \iff \frac{dM}{dy}(y)P(x, y) + M(y) \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = M(y) \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \\ \iff (xy^2 + y) \frac{dM}{dy}(y) + (2xy + 1)M(y) &= -M(y) \iff y(xy + 1) \frac{dM}{dy}(y) = -2(xy + 1)M(y) \\ \iff \frac{dM}{dy}(y) &= -\frac{2}{y}M(y), \quad y \neq 0 \end{aligned}$$

Das liefert die gewünschte Form. Diese Differentialgleichung kann mit Trennung der Veränderlichen gelöst werden:

$$\int \frac{1}{M} dM = -2 \int \frac{1}{y} dy \iff \ln|M| = -2 \ln|y| \iff M(y) = \pm \frac{1}{y^2}$$

Die Differentialgleichung ist mit dem integrierenden Faktor $M(y) = 1/y^2$ wegen

$$\frac{\partial(MP)}{\partial y}(x, y) = -2\frac{1}{y^3}(xy^2 + y) + \frac{1}{y^2}(2xy + 1) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial(MQ)}{\partial x}(x, y)$$

exakt. Jetzt kann eine Stammfunktion F gesucht werden:

$$F(x, y) = \int M(y)Q(x, y) dy = -x \int \frac{1}{y^2} dy = \frac{x}{y} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(y)P(x, y) \iff \frac{1}{y} + \frac{d\varphi}{dy}(y) = x + \frac{1}{y} \iff \varphi(y) = \frac{1}{2}x^2$$

Die Lösungen sind also

$$F(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = C.$$

Sie können nach y aufgelöst werden:

$$y(x) = \frac{x}{C - \frac{1}{2}x^2} = \frac{2x}{\tilde{C} - x^2}$$

mit $\tilde{C} = 2C$.

(c) Diese Differentialgleichung ist exakt:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\sin y + 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Suche einer Stammfunktion F :

$$F(x, y) = \int P dx = x \cos y + x^2 y + \varphi(y)$$

$$Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \iff x^2 - y - x \sin y = -x \sin y + x^2 + \frac{d\varphi}{dy}(y) \iff \varphi(y) = -\frac{1}{2}y^2$$

Damit folgt

$$F(x, y) = x \cos y + x^2 y - \frac{1}{2}y^2 = C.$$

Die Anfangsbedingung liefert $C = -1$. Auflösen nach y ist nicht möglich, wohl aber nach x . Quadratische Ergänzung

$$0 = x^2 y + x \cos y - \frac{1}{2}y^2 + 1 \iff 0 = x^2 + x \frac{\cos y}{y} - \frac{1}{2}y + \frac{1}{y} \iff 0 = \left(x + \frac{\cos y}{2y}\right)^2 - \frac{\cos^2 y}{4y^2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{y}$$

liefert

$$x(y) = -\frac{\cos y}{2y} \pm \sqrt{\frac{\cos^2 y}{4y^2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{y}} = -\frac{1}{2y} \left(\cos y \mp \sqrt{\cos^2 y + 2y^3 - 4y} \right).$$

Erneutes Anwenden der Anfangsbedingung $x(\sqrt{2}) = 0$ zeigt, daß das Vorzeichen der Wurzel negativ sein muß. Demnach ist die richtige Lösung

$$x(y) = -\frac{1}{2y} \left(\cos y - \sqrt{\cos^2 y + 2y^3 - 4y} \right).$$

(d) Tja, da hat wohl der Fehlerteufel zugeschlagen: Hier steht noch einmal die Differentialgleichung von Aufgabenteil (b).

Aufgabe 4. (Spezielle integrierende Faktoren)

Unter Umständen kann es sehr schwierig sein, integrierende Faktoren zur Lösung nicht exakter Differentialgleichungen zu finden. In einigen Fällen kann man sie jedoch direkt angeben.

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

mit auf einem Rechteck R stetig partiell differenzierbaren Funktionen P und Q . Zeigen Sie:

(a) Hängt die Funktion

$$f := \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

nur von der Variablen x ab, so ist $M(x) := \exp(\int f(x) dx)$ ein integrierender Faktor.

(b) Gilt

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

so ist $M := 1/(P^2 + Q^2)$ ein integrierender Faktor.

Lösung 4.

(a) Es ist zu prüfen, ob die Differentialgleichung

$$M(x)P(x, y)dx + M(x)Q(x, y)dy = 0$$

exakt ist, ob also die Bedingung

$$(4.1) \quad \frac{\partial(MP)}{\partial y} = \frac{\partial(MQ)}{\partial x}$$

erfüllt ist. Offenbar ist $\frac{dM}{dx} = fM$ und damit sieht man leicht

$$\frac{\partial(MQ)}{\partial x} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) MQ + M \frac{\partial Q}{\partial x} = M \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(MP)}{\partial y},$$

demnach stimmt die Behauptung.

(b) Es ist wiederum (4.1) zu prüfen. Die partiellen Ableitungen von M lauten

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = \frac{-1}{(P^2 + Q^2)^2} \left(2P \frac{\partial P}{\partial \xi} + 2Q \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right) = -M^2 \left(2P \frac{\partial P}{\partial \xi} + 2Q \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right),$$

wobei ξ eine der Variablen x und y sein kann. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial(MP)}{\partial y} &= -M^2 \left(2P \frac{\partial P}{\partial y} + 2Q \frac{\partial Q}{\partial y} \right) P + M \frac{\partial P}{\partial y} \\ &= M^2 \left(-2P^2 \frac{\partial P}{\partial y} - 2PQ \frac{\partial Q}{\partial y} + P^2 \frac{\partial P}{\partial y} + Q^2 \frac{\partial P}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

(Einsetzen der Voraussetzungen)

$$\begin{aligned} &= M^2 \left(2P^2 \frac{\partial Q}{\partial x} - 2PQ \frac{\partial P}{\partial x} - P^2 \frac{\partial Q}{\partial x} - Q^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \\ &= M^2 \left(-2PQ \frac{\partial P}{\partial x} - 2Q^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + P^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + Q^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \\ &= -M^2 \left(2P \frac{\partial P}{\partial x} + 2Q \frac{\partial Q}{\partial x} \right) Q + M \frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= \frac{\partial(MQ)}{\partial x}. \end{aligned}$$

M ist also tatsächlich unter den angegebenen Voraussetzungen ein integrierender Faktor.