

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 1. (Datierung mittels Radiokarbonmethode)

In der Natur frei vorkommender Kohlenstoff ist ein Isotopengemisch aus C^{14} und C^{12} . C^{14} ist radioaktiv und es zerfällt ständig ein konstanter Anteil von 0,012%/Jahr. Das Verhältnis in der freien Natur bleibt aber konstant, da ständig in der Atmosphäre durch Höhenstrahlung C^{14} neu entsteht. Lebende Organismen nehmen ständig durch ihre Nahrung so schnell und so viel Kohlenstoffgemisch auf, daß ihr relatives Verhältnis konstant bleibt. Stirbt ein Lebewesen, stoppt die C^{14} -Zufuhr und der Zerfallsprozeß läuft ungestört ab. Daher läßt sich aus dem relativen C^{14} -Anteil (den man aufgrund seines radioaktiven Zerfalls direkt messen kann) im Vergleich zum ursprünglichen Anteil direkt die Zeit seit dem Sterbedatum hochrechnen.

Diese sogenannte C^{14} -Methode wird für die Datierung von historischen und fossilen Objekten eingesetzt. Für ihre Entwicklung erhielt der Chemiker W. F. LIBBY 1960 den Nobelpreis.

- (a) Zeigen Sie: Die sogenannte Halbwertszeit von C^{14} , das heißt die Zeitspanne, in der sich eine gegebene Anzahl von C^{14} durch radioaktiven Zerfall halbiert, beträgt etwa 5776 Jahre.
- (b) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die den zeitlichen Verlauf des relativen C^{14} -Anteils $a(t)$ beschreibt, und lösen Sie sie unter der Annahme, daß der Anteil zum Zeitpunkt $t = 0$ gerade a_0 beträgt.
- (c) Bei einer Papyrusrolle, die in der Nähe des Toten Meeres in einer Höhle gefunden wurde, beträgt der C^{14} -Anteil nur noch 78% des „frischen“ Anteils. Wie alt würden Sie die Schriftrolle schätzen?

Lösung 1.

- (a) Der C^{14} -Anteil verringert sich pro Jahr um 0,012%, das heißt nach einem Jahr ist noch ein Anteil

$$R_1 = 1 - \frac{0,012}{100}$$

der ursprünglichen Menge an C^{14} vorhanden. Nach einem weiteren Jahr verringert er sich wiederum um 0,012% zu

$$R_2 = \left(1 - \frac{0,012}{100}\right)^2$$

und allgemein ist nach n Jahren noch ein Anteil von

$$R_n = \left(1 - \frac{0,012}{100}\right)^n = (0,99988)^n$$

der ursprünglichen Menge vorhanden. Die Anzahl hat sich gerade halbiert, wenn $R_n \lesssim \frac{1}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Das liefert

$$(0,99988)^n \lesssim \frac{1}{2} \iff n \ln 0,99988 \lesssim -\ln 2 \iff n \gtrsim -\frac{\ln 2}{\ln 0,99988} \iff n \gtrsim 5775,880.$$

Es müssen also fast 5776 Jahre vergehen, bevor sich der Anteil an C^{14} halbiert hat.

- (b) Der Parameter t gebe die vergangene Zeit in Jahren an. Desweiteren sei die Konstante $\mu := 0,012\%$ definiert. Dann gilt nach Voraussetzung für $\Delta t > 0$

$$a(t + \Delta t) = a(t)(1 - \mu)^{\Delta t}.$$

Setzt man $\lambda := -\ln(1 - \mu)$ (es gilt $\lambda > 0$), so folgt ($a > 0$)

$$a(t + \Delta t) = a(t)e^{-\lambda\Delta t} \iff \frac{\ln a(t + \Delta t) - \ln a(t)}{\Delta t} = -\lambda.$$

Übergang zu infinitesimalen Zeitänderungen $\Delta t \rightarrow dt$ liefert

$$(1.1) \quad \frac{d(\ln a)}{dt}(t) = -\lambda$$

und man erhält direkt die Lösung

$$\ln a(t) = -\lambda t + c \implies a(t) = Ce^{-\lambda t}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}^+$. Mit der Anfangsbedingung $a(0) = a_0$ folgt schließlich

$$a(t) = a_0 e^{-\lambda t}.$$

Aus (1.1) kann auch die Differentialgleichung gewonnen werden, denn mit der Kettenregel folgt

$$-\lambda = \frac{da}{dt}(t) \frac{1}{a(t)} \iff \frac{da}{dt}(t) = -\lambda a(t).$$

Die Materialkonstante λ heißt auch *Zerfallskonstante*. Mit der angegebenen jährlichen Abnahme von 0,012% ergibt sich für C^{14}

$$\lambda_{C^{14}} \approx 1,20 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{Jahr}} \approx 3,81 \cdot 10^{-12} \frac{1}{s}.$$

(c) Gesucht wird nach einem t mit $a(t) = \frac{78}{100}a_0$, also

$$a_0 \exp(-\lambda_{C^{14}} t) = \frac{78}{100}a_0 \iff t \approx -\frac{\ln 0,78}{1,2} \cdot 10^4 \approx 2070,51 \text{ Jahre.}$$

Die Schriftrolle dürfte also etwa 2070 Jahre alt sein.

Aufgabe 2. (Ausbreitung von Gerüchten)

„Pst! Hast Du schon gehört? Am 28.11.01 um 17:00 gibt's in der Aula einen mathematischen Vortrag für ein breites Publikum mit anschließendem Buffet...“

– In einer Population von N Studenten breitet sich ein Gerücht aus. Zum Zeitpunkt t seien $I(t)$ Studenten informiert. Die Ausbreitung des Gerüchts erfolgt ausschließlich über Mundpropaganda: Pro Zeiteinheit trifft jeder Studierende $k > 0$ Kommilitonen. Nehmen wir an, daß diese Kontakte völlig zufällig in der Studentenspopulation verteilt sind (also ein Informierter einen Anteil von qk Nichtinformierten trifft und informiert, wobei q der relative Anteil der Nichtinformierten ist).

Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die die Ausbreitung des Gerüchts beschreibt, und lösen Sie sie unter der Annahme, daß zum Zeitpunkt 0 genau ein Student Bescheid weiß!

Lösung 2.

Zu jedem Zeitpunkt gilt offenbar

$$q(t) = \frac{N - I(t)}{N}.$$

Daher trifft *ein informierter* Student in dem infinitesimalen Zeitintervall dt

$$q(t)k dt = \frac{N - I(t)}{N} k dt$$

nicht informierte Studenten. Da bereits $I(t)$ informiert sind, treffen in demselben Intervall *alle informierten* Studenten auf

$$q(t)I(t)k dt = \frac{N - I(t)}{N} I(t)k dt$$

nicht informierte. Das ist aber gerade der Teil, der neu informiert wird. Daher gilt

$$I(t + dt) - I(t) = dI(t) = \frac{N - I(t)}{N} I(t)k dt \iff \frac{dI}{dt}(t) = kI(t) - \frac{k}{N} I^2(t).$$

Das ist gerade die *logistische Differentialgleichung* wie sie in der Vorlesung für das logistische Wachstum von Populationen vorkam. Ein Blick auf Aufgabe 4 verrät, daß es sich auch um eine BERNOULLISCHE Differentialgleichung mit $\rho = 2$ und Konstanten α, β handelt, und mit der dort beschriebenen Methode soll sie hier gelöst werden: Substitution von $z := I^{1-\rho} = \frac{1}{I}$ liefert

$$\begin{aligned} \frac{d\frac{1}{z}}{dt}(t) &= k \frac{1}{z(t)} - \frac{k}{N} \frac{1}{z^2(t)} \iff -\frac{dz}{dt}(t) \frac{1}{z^2(t)} = k \frac{1}{z(t)} - \frac{k}{N} \frac{1}{z^2(t)} \\ (2.1) \qquad \qquad \qquad &\iff \frac{dz}{dt}(t) = -kz(t) + \frac{k}{N} \end{aligned}$$

Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$\frac{dz_h}{dt}(t) = -kz_h(t)$$

besitzt die Lösung

$$z_h(t) = Ce^{-kt}$$

mit einem $C \in \mathbb{R}$. Durch Variation der Konstanten $C = C(t)$ und Einsetzen in (2.1) erhält man

$$\frac{dC}{dt}(t)e^{-kt} - kC(t)e^{-kt} = -kC(t)e^{-kt} + \frac{k}{N} \iff \frac{dC}{dt}(t) = \frac{k}{N}e^{kt} \iff C(t) = \frac{1}{N}e^{kt}.$$

Da nur eine partikuläre Lösung z_p gesucht wird, brauchen keine Integrationskonstanten hinzugefügt zu werden. Die partikuläre Lösung lautet nun

$$z_p(t) = \frac{1}{N}e^{kt}e^{-kt} = \frac{1}{N}.$$

Die allgemeine Lösung von (2.1) ist damit

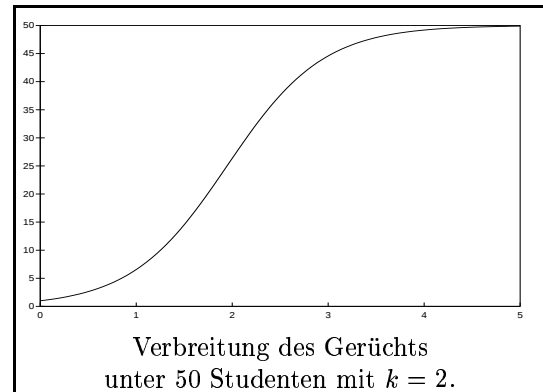
$$z(t) = z_h(t) + z_p(t) = Ce^{-kt} + \frac{1}{N}.$$

Rücksubstitution $I = \frac{1}{z}$ liefert schließlich

$$I(t) = \frac{1}{Ce^{-kt} + \frac{1}{N}}.$$

Mit der Anfangsbedingung $I(0) = 1$ folgt

$$I(t) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{N})e^{-kt} + \frac{1}{N}} = \frac{N}{(N-1)e^{-kt} + 1}.$$



Aufgabe 3. (Lineare Differentialgleichungen)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme; geben Sie falls nötig an, für welchen Wertebereich die bestimmte Lösung sinnvoll ist.

- (a) $y' = 2xy + x, \quad y(0) = 1$
- (b) $y' = \frac{x - 4xy}{1 + x^2}, \quad y(1) = 1$
- (c) $y' = 2xy + 1, \quad y(0) = 0$

(Hinweis: Nicht jedes Integral läßt sich in geschlossener Form lösen!)

Lösung 3.

(a) Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$\frac{dy_h}{dx}(x) = 2xy_h(x).$$

Ihre Lösung ist

$$y_h(x) = C \exp\left(\int 2x dx\right) = Ce^{x^2}$$

mit einem $C \in \mathbb{R}$. Durch Variation der Konstanten $C = C(x)$ und Einsetzen in die ursprüngliche Differentialgleichung findet man

$$\frac{dC}{dx}(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} = 2xC(x)e^{x^2} + x \iff \frac{dC}{dx}(x) = xe^{-x^2} \iff C(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

Das liefert eine partikuläre Lösung

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}e^{x^2} = -\frac{1}{2}$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}.$$

Sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ schließlich liefert

$$y(x) = \frac{3}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}.$$

(b) Es ist

$$\frac{dy_h}{dx}(x) = -\frac{4x}{1+x^2}y_h(x)$$

mit der Lösung

$$y_h(x) = C \exp\left(-2 \int \frac{2x}{1+x^2} dx\right) = C \exp(-2 \ln|1+x^2|) = C \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Variation der Konstanten $C = C(x)$ und Einsetzen in die ursprüngliche Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dx}(x) \frac{1}{(1+x^2)^2} - C(x) \frac{4x}{(1+x^2)^3} &= -\frac{4x}{1+x^2} C(x) \frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{x}{1+x^2} \\ \iff \frac{dC}{dx}(x) &= x + x^3 \iff C(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = C \frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{4C + 2x^2 + x^4}{4(1+x^2)^2}.$$

Sie ist ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ liefert

$$y(x) = \frac{13 + 2x^2 + x^4}{4(1+x^2)^2}.$$

(c) Hier ist die homogene Differentialgleichung

$$\frac{dy_h}{dx}(x) = 2xy_h(x)$$

wie in Teil (a). Sie besitzt natürlich dieselbe Lösung, nämlich

$$y_h(x) = Ce^{x^2}$$

mit einem $C \in \mathbb{R}$. Variation der Konstanten $C = C(x)$ liefert allerdings diesmal

$$\frac{dC}{dx}(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} = 2xC(x)e^{x^2} + 1 \iff \frac{dC}{dx}(x) = e^{-x^2} \iff C(x) = \int_{x_0}^x e^{-\xi^2} d\xi$$

mit einem $x_0 \in \mathbb{R}$, wobei das Integral nicht elementar lösbar ist. Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = Ce^{x^2} + \left(\int_{x_0}^x e^{-\xi^2} d\xi\right)e^{x^2} = \left(C + \int_{x_0}^x e^{-\xi^2} d\xi\right)e^{x^2}$$

und ist wieder auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ folgt mit $x_0 = 0$

$$y(x) = \left(\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi\right)e^{x^2}.$$

Aufgabe 4. (BERNOULLISCHE Differentialgleichung)

Die sogenannte BERNOULLISCHE Differentialgleichung hat die Form

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x)y^\rho,$$

wobei ρ eine feste Zahl ist.

Zeigen Sie: Sind $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ auf dem Intervall I stetig, so besitzt die Anfangswertaufgabe mit der Randbedingung $y(x_0) = y_0 > 0$ für $\rho \neq 0, 1$ genau eine Lösung auf einem x_0 enthaltenden Teilintervall von I .

(Tip: Betrachten Sie die Substitution $z = y^{1-\rho}$, lösen Sie die entstehende Gleichung, dann substituieren Sie $y = z^{1/(1-\rho)}$. Auf welchem Teilintervall ist y definiert?)

Lösung 4.

Durch die Substitution $z = y^{1-\rho}$ ($y = z^{1/(1-\rho)}$) wird die Differentialgleichung überführt in

$$\begin{aligned} \frac{d(z^{1/(1-\rho)})}{dx}(x) &= \alpha(x)(z(x))^{1/(1-\rho)} + \beta(x)(z(x))^{\rho/(1-\rho)} \\ \iff \frac{dz}{dx}(x) \frac{1}{1-\rho} (z(x))^{1/(1-\rho)-1} &= \alpha(x)(z(x))^{1/(1-\rho)} + \beta(x)(z(x))^{\rho/(1-\rho)} \\ \iff \frac{dz}{dx}(x) &= (1-\rho)\alpha(x)z(x) + (1-\rho)\beta(x). \end{aligned}$$

Das ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung. Setze

$$\tilde{\alpha}(x) := (1-\rho)\alpha(x), \quad \tilde{\beta}(x) := (1-\rho)\beta(x).$$

Die homogene Gleichung besitzt die Lösung

$$z_h(x) = C \exp\left(\int \tilde{\alpha}(x) dx\right)$$

mit einem $C \in \mathbb{R}$. Eine partikuläre Lösung kann durch Variation der Konstanten $C = C(x)$ gefunden werden:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dx}(x) \exp\left(\int \tilde{\alpha}(x) dx\right) + C(x)\tilde{\alpha}(x) \exp\left(\int \tilde{\alpha}(x) dx\right) &= \tilde{\alpha}(x)C(x) \exp\left(\int \tilde{\alpha}(x) dx\right) + \tilde{\beta}(x) \\ \iff \frac{dC}{dx}(x) &= \tilde{\beta}(x) \exp\left(-\int \tilde{\alpha}(x) dx\right) \\ \iff C(x) &= \int \tilde{\beta}(x) \exp\left(-\int \tilde{\alpha}(x) dx\right) dx \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\begin{aligned} z(x) &= \left\{ C + \int \tilde{\beta}(x) \exp\left(-\int \tilde{\alpha}(x) dx\right) dx \right\} \exp\left(\int \tilde{\alpha}(x) dx\right) \\ &= \left\{ C + (1-\rho) \int \beta(x) \exp\left(-(1-\rho) \int \alpha(x) dx\right) dx \right\} \exp\left((1-\rho) \int \alpha(x) dx\right). \end{aligned}$$

Die Bedingung $y(x_0) = y_0 > 0$ wird ebenfalls überführt in $z(x_0) = y_0^{1-\rho}$. Wird diese mit $z(x)$ für ein $C \in \mathbb{R}$ erfüllt (und das wird sie sicher), so kann mit $y = z^{1/(1-\rho)}$ zurück substituiert werden. Dabei ist darauf zu achten, daß y nur in dem Intervall die Anfangswertaufgabe erfüllt, in dem z positiv ist und welches x_0 enthält. Auf diesem Intervall gilt dann

$$y(x) = \left\{ C + (1-\rho) \int \beta(x) \exp\left(-(1-\rho) \int \alpha(x) dx\right) dx \right\}^{1/(1-\rho)} \exp\left(\int \alpha(x) dx\right).$$

Anmerkung: Hier wurde jeweils etwas „schlampig“ ein unbestimmtes Integral als Symbolisierung für Stammfunktionen verwendet.