

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 1. (Rotation über geschlossene Flächen)

Gegeben sei eine beliebige C^2 -Funktion $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und eine in sich geschlossene Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie mit dem Satz von GAUSS im Raum

$$\int_F \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = 0.$$

(Tip: Verifizieren Sie zuerst $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{f} = 0$.)

(b) Wie kann man dieses Ergebnis mit dem Satz von STOKES erhalten?

(Tip: Zerschneiden Sie die Fläche F mit einer Ebene und überlegen Sie, wie integriert werden muß.)

Lösung 1.

(a) Es ist angenehm, für die partiellen Ableitungen die verkürzten Schreibweisen

$$\partial_x \vec{f} := \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}, \quad \partial_y \vec{f} := \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}, \quad \partial_z \vec{f} := \frac{\partial \vec{f}}{\partial z}$$

zu verwenden. Es gilt offenbar

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{f} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_y f_z - \partial_z f_y \\ \partial_z f_x - \partial_x f_z \\ \partial_x f_y - \partial_y f_x \end{pmatrix} = \partial_x (\partial_y f_z - \partial_z f_y) + \partial_y (\partial_z f_x - \partial_x f_z) + \partial_z (\partial_x f_y - \partial_y f_x) = 0,$$

da die Reihenfolge der partiellen Ableitungen nach dem Satz von SCHWARZ für C^2 -Funktionen vertauschbar ist. Sei nun V das von der Fläche F umschriebene Volumen. Mit dem Satz von GAUSS folgt

$$\iint_F \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{f} dV = 0.$$

(b) Durch Zerschneiden der geschlossenen Fläche F mit einer Ebene erhält man zwei Flächen F_1 und F_2 mit demselben Rand $\partial F_1 = \partial F_2$. Es sei $\vec{\Phi}: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Fläche F und K_1, K_2 die Einschränkungen auf die Flächen F_1, F_2 . Offenbar gilt dann auch $\partial K_1 = \partial K_2$. Der Satz von STOKES besagt nun

$$\int_{F_i} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\vec{\Phi} \circ \gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{x}, \quad i \in \{1, 2\}$$

für geeignete Wege γ_1, γ_2 über den Rand ∂K_1 . Insbesondere müssen die Wege *positiv orientiert* sein, das heißt die Fläche muß *links* von ihnen liegen. Dann muß aber $\gamma_1 = -\gamma_2$ sein und es folgt

$$\int_F \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{F_1} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} + \int_{F_2} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\vec{\Phi} \circ \gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{x} - \int_{\vec{\Phi} \circ \gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{x} = 0.$$

Aufgabe 2. (STOKES bei der Arbeit)

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}.$$

Integrieren Sie rot $\vec{f}$ auf der Fläche, die durch

$$\vec{\Phi} : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1+v) \cos u \\ (1+v) \sin u \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad K := [0, \pi] \times [0, 1]$$

parametrisiert ist, einmal direkt und einmal mit dem Satz von STOKES.

Lösung 2.

Zunächst das direkte Integral. Die Rotation des Vektorfeldes ist

$$\text{rot } \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor $\vec{n}(u, v)$ lautet

$$\vec{n}(u, v) = \left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \right)(u, v) = \begin{pmatrix} -(1+v) \sin u \\ (1+v) \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v(1+v) \cos u \\ 2v(1+v) \sin u \\ -(1+v) \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für das Flußintegral über die durch $\vec{\Phi}$ parametrisierte Fläche F

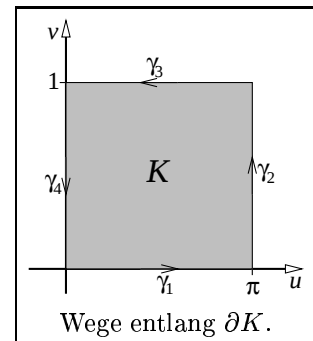
$$\begin{aligned} \int_F \text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} &= \iint_K \langle \text{rot } \vec{f}(\vec{\Phi}(u, v)), \vec{n}(u, v) \rangle d(u, v) \\ &= \iint_K \begin{pmatrix} -(1+v) \sin u \\ -v^2 \\ -(1+v) \cos u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2v(1+v) \cos u \\ 2v(1+v) \sin u \\ -(1+v) \end{pmatrix} d(u, v) \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi (-2v(1+v)^2 \sin u \cos u - 2v^3(1+v) \sin u + (1+v)^2 \cos u) du dv \end{aligned}$$

(Die Terme mit $\cos u$ fallen bei der Integration über u heraus.)

$$= -4 \int_0^1 (v^3 + v^4) dv = -1 - \frac{4}{5} = -\frac{9}{5}.$$

Für die Integration mit dem Satz von STOKES muß ein Weg entlang des Randes ∂F von F gefunden werden. Diesen erhält man, indem ein Weg γ entlang des Randes ∂K von K mit $\vec{\Phi}$ abgebildet wird (dabei ist im allgemeinen auf Injektivität zu achten). Der Weg γ wird in vier Teile $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ zerlegt (vgl. Abbildung). Die Indexvariable t laufe jeweils durch das Intervall $I := [0, 1]$. Die Parametrisierungen lauten im einzelnen:

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 : I &\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t\pi \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{c}_2 : I &\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \pi \\ t \end{pmatrix} \\ \vec{c}_3 : I &\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} (1-t)\pi \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{c}_4 : I &\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Der Weg entlang ∂F ist nun gerade die Komposition $\vec{\Phi} \circ \gamma$. Er ist ebenfalls in vier Teilwege $\vec{\Phi} \circ \gamma_i$ mit den Parametrisierungen $\vec{\Phi} \circ \vec{c}_i$, $i \in \{1, \dots, 4\}$ zerlegt. Für die Wegintegrale werden die Tangentenvektoren (Ableitung nach t) benötigt:

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{\Phi} \circ \vec{c}_1)}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t\pi) \\ \sin(t\pi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi \sin(t\pi) \\ \pi \cos(t\pi) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{d(\vec{\Phi} \circ \vec{c}_2)}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -(1+t) \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \\ \frac{d(\vec{\Phi} \circ \vec{c}_3)}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 2 \cos((1-t)\pi) \\ 2 \sin((1-t)\pi) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \sin((1-t)\pi) \\ -2\pi \cos((1-t)\pi) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{d(\vec{\Phi} \circ \vec{c}_4)}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 2-t \\ 0 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2(1-t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Wegintegrale

$$W_i := \int_{\vec{\Phi} \circ \gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \left\langle \vec{f} \circ \vec{\Phi} \circ \vec{c}_i, \frac{d(\vec{\Phi} \circ \vec{c}_i)}{dt} \right\rangle dt$$

berechnen:

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} \cos(t\pi) \sin(t\pi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\pi \sin(t\pi) \\ \pi \cos(t\pi) \\ 0 \end{pmatrix} dt = -\pi \int_0^1 \cos(t\pi) \sin^2(t\pi) dt = 0 \\ W_2 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -t^2(1+t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} dt = -2 \int_0^1 (t^3 + t^4) dt = -\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{9}{10} \\ W_3 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 4 \sin((1-t)\pi) \cos((1-t)\pi) \\ 2 \sin((1-t)\pi) \\ 2 \cos((1-t)\pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\pi \sin((1-t)\pi) \\ -2\pi \cos((1-t)\pi) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= 4\pi \int_0^1 \left(2 \sin^2((1-t)\pi) \cos((1-t)\pi) - \sin((1-t)\pi) \cos((1-t)\pi) \right) dt = 0 \\ W_4 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-t)^2(2-t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2(1-t) \end{pmatrix} dt = -2 \int_0^1 (t^4 - 5t^3 + 9t^2 - 7t + 2) dt \\ &= -\frac{2}{5} + \frac{5}{2} - 6 + 7 - 4 = -\frac{4-25+30}{10} = -\frac{9}{10} \end{aligned}$$

Für den gesamten Weg entlang des Randes ∂F

$$\vec{\Phi} \circ \gamma = \bigoplus_{i=1}^4 \vec{\Phi} \circ \gamma_i$$

(das Symbol $\bigoplus$ bezeichnet hierbei das „Aneinanderhängen“) folgt

$$\int_{\vec{\Phi} \circ \gamma} \vec{f} \cdot d\vec{x} = \sum_{i=1}^4 W_i = -\frac{9}{5}.$$

Die Ergebnisse stimmen erwartungsgemäß überein.

Aufgabe 3. (Sektorflächenformel)

Es sei $\rho(\phi)$ ein winkelabhängiger Radius. Zeigen Sie für den vom Radius $\rho(\phi)$ zwischen den Winkeln ϕ_1 und ϕ_2 überstrichenen Sektor

$$B := \{(r, \phi)^T \mid 0 \leq r \leq \rho(\phi), \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\} \subset \mathbb{R}^2$$

die Sektorflächenformel

$$|B| = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho^2(\phi) d\phi.$$

Lösung 3.

Allgemein ist die Fläche von B bestimmbar durch

$$(3.1) \quad |B| = \iint_B d(x, y).$$

In diesem Fall bietet es sich an, Polarkoordinaten

$$\vec{\Phi} : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$$

zu verwenden. Für die Substitution wird der Betrag der Funktionaldeterminante

$$|\det \vec{\Phi}'(r, \phi)| = \left| \det \begin{pmatrix} \sin \phi & r \cos \phi \\ \cos \phi & -r \sin \phi \end{pmatrix} \right| = r$$

benötigt. Umformen von (3.1) auf Polarkoordinaten liefert dann

$$|B| = \iint_B r d(r, \phi) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{\rho(\phi)} r dr d\phi = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho^2(\phi) d\phi.$$

Aufgabe 4. (Das 2. KEPLERSche Gesetz)

Ein Massepunkt bewege sich unter dem Einfluß einer Zentralkraft; das ist ein Kraftfeld, welches an jeder Stelle im Raum in Richtung des Ursprungs weist oder davon weg. Dann bewegt sich der Massepunkt innerhalb einer Ebene, dies sei die x - y -Ebene. Die Bahn des Teilchens werde mit dem Zeitparameter t beschrieben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Der Drehimpuls $\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ ist unter einer Zentralkraft konstant:

$$\vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} = c$$

(a) Beschreiben Sie die Bahn durch Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \phi(t) \\ r(t) \sin \phi(t) \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie den Drehimpuls bezüglich r und ϕ .

(b) Es seien $\phi_1 := \phi(t_1)$ und $\phi_2 := \phi(t_2)$. Zeigen Sie, daß der Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, speziell in der Zeit von t_1 bis t_2 die Fläche

$$|B| = \frac{|c|}{2}(t_2 - t_1).$$

(Tip: Verwenden Sie die Sektorflächenformel aus obiger Aufgabe und substituieren Sie $\phi = \phi(t)$.)

Lösung 4.

(a) Mit den angegebenen Polarkoordinaten folgt für den Drehimpuls

$$c = \left(\vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right)(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos \phi(t) \\ r(t) \sin \phi(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \cos \phi(t) - r(t) \dot{\phi}(t) \sin \phi(t) \\ \dot{r}(t) \sin \phi(t) + r(t) \dot{\phi}(t) \cos \phi(t) \end{pmatrix} = r^2(t) \dot{\phi}(t),$$

wobei der Punkt die in der Physik übliche Bezeichnung für die Ableitung nach der Zeit t sei.

(b) Substitution von $\phi = \phi(t)$ in der Sektorflächenformel liefert für $\phi(t_1) = \phi_1$ und $\phi(t_2) = \phi_2$

$$|B| = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho^2(\phi) d\phi = \int_{t_1}^{t_2} \rho^2(\phi(t)) \dot{\phi}(t) dt.$$

Setzt man $r(t) := \rho(\phi(t))$, so ist nach Teil (a) der Integrand konstant c . Daher gilt

$$|B| = \pm \frac{c}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt = \pm \frac{c}{2}(t_2 - t_1),$$

wobei das Vorzeichen dem Richtungssinn angepaßt werden muß.